Ленинградская область

Региональный турнир по математике

Заочный тур

10 ноября - 17 декабря 2022 г.

1. *Вышки мобильной связи.*

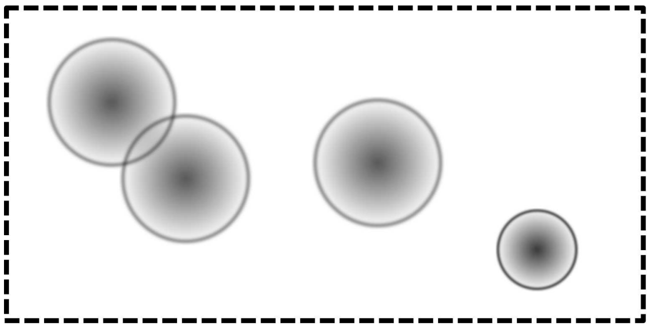
   На местности рассматривается прямоугольное поле размерами $m \times n$ км. Требуется расставить вышки мобильной связи так, чтобы в любой точке этого поля телефон мог поймать сигнал.

   Уровень сигнала каждой вышки определяется по формуле $P = \dfrac{K}{r^2}$, где P - уровень сигнала, K – коэффциент мощности, считающийся неизменным в задаче, r – расстояние от вышки до телефона (высотой вышки можно пренебречь и рассмотреть задачу на плоскости). Телефон может подключиться только к одной вышке, при этом уровень сигнала в точке, где расположен телефон, должен быть не меньше заданного значения P_0.

   1.1 Пусть все вышки одинаковы. Требуется использовать как можно меньше вышек. Предложите свою схему оптимальной расстановки вышек и обоснуйте ее. Зависит ли ваш результат от соотношения $m : n$?

   1.2 Пусть имеется два вида вышек. Они отличаются мощностью. Вышки первого типа имеют коэффициент мощности K_1, вышки второго типа имеют коэффициент мощности K_2. Будем считать, что $K_1 = 4K_2$. Предложите свою схему оптимальной расстановки вышек в этом случае.

   1.3 Имеет ли значание цена вышек? Решите задачу для вышек, имеющих разную стоимость; для вышек, цена которых пропорциональна мощности; для вышек, цена которых отличается в a раз.



2. *Автобус и вероятность.*

   Автобусная остановка находится у дома, в котором живет Петя. Следующая остановка находится у школы. Автобус едет до школы 15 минут. Пете требуется 40 минут, чтобы дойти пешком до щколы. Интервал движения автобусов составляет 50 минут (*время между прибытием автобуса и следующего за ним ровно 50 мин, автобусы прибывают в произвольное время, т.е. их расписание нам неизвестно. Время на посадку-высадку не учитываем*).

   2.1 Петя вышел из дома за 20 минут до начала занятий. Найдите вероятность того, что Петя успеет к началу зантий, если он решил дождаться автобуса.

2.2 Петя вышел из дома ровно за час до начала занятий. Он ждал 20 минут, автобус не пришел. Найдите вероятность того, что Петя успеет к началу занятий, если он продолжит ждать автобус и не пойдет пешком.

2.3 Петя вышел из дома ровно за час до начала занятий. Он ждал 20 минут, автобус не пришел. Тогда Петя решил пойти пешком, чтобы точно успеть к началу занятий. Какова вероятность, что автобус обгонит Петю?

2.4 Оцените вероятность того, что Петя успеет к началу занятий. Требуется учесть, что Петя может решить дожидаться автобуса или идти пешком.

2.5 Петя вышел из дома ровно за час до начала занятий. Укажите (с точностью до пяти минут) интервал времени после выхода Пети из дома, в течение которого появление Пети в школе наиболее вероятно.

3. *Цветной многоугольник.*

Дан n-угольник. Все его стороны и все его диагонали раскрашены в два цвета, красный и синий. Необходимо обойти все вершины многоугольника по циклу (побывать в каждой вершине ровно один раз и вернуться в исходную). При этом требуется обойти все вершины многоугольника так, чтобы во время обхода сначала пройти по красным отрезкам, затем по синим (*т.е. изменение цвета происходит в какой-то одной вершине*)

3.1 Для заданного многоугольника и для заданной раскраски, можно ли совершить такой обход?

3.2 Для заданного многоугольника и для заданной раскраски, существует ли несколько разных путей обхода указанным выше способом?

3.3 Можно ли начать обход, не имея плана обхода, т.е. двигаться из каждой вершины по произвольному отрезку нужного цвета?

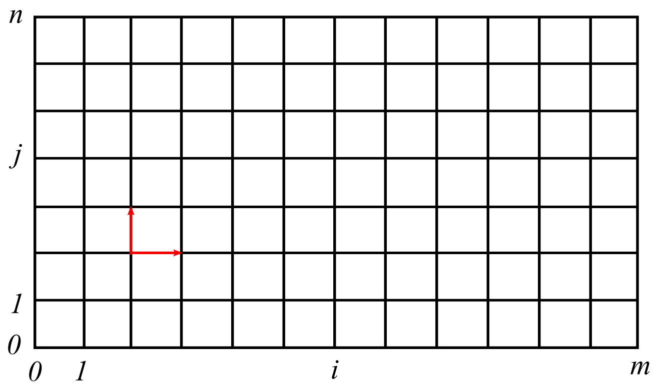
3.4 Можно ли для заданного многоугольника и для заданной раскраски определить путь обхода, содержащий как можно больше отрезков одного цвета?

4. *Комбинаторика на сетке.*

В задаче рассматривается прямоугольная сетка размера $(m+1)\times(n+1)$, т.е. $m+1$ вертикальных отрезков и $n+1$ горизонтальных отрезков, соответственно попарно пересекающих друг друга. Частица движется по отрезкам сетки от одного узла к другому. Каждый узел имеет координату $(i;j)$, где $i=0,1,\ldots,m$, $j=0,1,\ldots,n$. Для удобства нумерацию узлов будем вести от левого нижнего угла вправо и вверх. Рассматривается движение только вправо или вверх, т.е. единичный переход от одного узла к следующему происходит либо по горизонтальному отрезку вправо, либо по вертикальному отрезку вверх.

4.1 Дана точка с координатами $(p;q)$. Сколько путей (траекторий), ведущих из левого нижнего узла в правый верхний, проходит через данную точку?

4.2 Даны две точки с координатами $(p;q)$ и $(s;t)$. Сколько путей (траекторий), ведущих из левого нижнего узла в правый верхний, проходит ровно через одну из данных точек?



4.3 Назовем *лестницей* такой путь, в котором два подъема не стоят рядом, т.е. в котором запрещено два подряд перемещения в вертикальном направлении. Лестница можен иметь *площадки*, т.е. два и более идущих подряд перемещения в горизонтальном направлении. Сколько существует лестниц, по которым можно подняться из левого нижнего узла в правый верхний?

4.4 Сколько существует лестниц, по которым можно подняться из левого нижнего узла в правый верхний, и которые содержат точку с координатами $(p; q)$?

4.5 Сколько существует лестниц, по которым можно подняться из левого нижнего узла в правый верхний, и которые содержат только площадки длиной не более k?

5. *Функции с модулем.*

5.1 Найдите все такие функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых для любого x выполняется

$$f(x(1+|x|)) \le x \le f(x)\,(1+|f(x)|)$$

5.2 Найдите все такие функции $[-1;1] \to [-1;1]$, для которых для любого x выполняется

$$f\left(\frac{2x}{1+|x|}\right) \le x \le \frac{2f(x)}{1+|f(x)|}$$

5.3 Обобщите эту задачу на разные функции.

6. *Средние расстояния.*

6.1 Дан правильный треугольник. Найдите внутри этого треугольника все точки, такие, что расстояние от такой точки до одной стороны равно среднему арифметическому расстояний до двух других сторон.

6.2 Дан правильный треугольник. Найдите внутри этого треугольника все точки, такие, что расстояние от такой точки до одной стороны равно среднему геометрическому расстояний до двух других сторон.

6.3 Дан правильный треугольник. Найдите внутри этого треугольника все точки, такие, что расстояние от такой точки до одной стороны равно среднему квадратичному расстояний до двух других сторон.

6.4 Обобщите эту задачу на случай равнобедренного треугольника.

- *Решения задач необходимо написать на бумаге, сканировать и отправить не позднее 11 декабря 2022 г. на e-mail konfint@yandex.ru*
- *Вопросы по условиям задач можно задать по электронной почте по указанному выше адресу.*
- *Не предполагается, что все команды-участники турнира решат все задачи, тем не менее, чем больше задач выполнено, тем выше рейтинг команды. Имеет смысл отправить все решения, в которых имеется хотя бы частичное продвижение.*
- *Предложенные задачи требуют внимательного анализа условия, в этом смысле они рассматриваются как исследовательские. Наличие обобщения задачи усиливает результат.*