

## Ленинградская область

Региональный турнир по математике

Отборочный этап

16 - 20 декабря 2024 г.

1. Сообщения кодируются последовательностями из 0 и 1, при этом допускается использование последовательностей, в которые входит не более двух рядом стоящих нулей и не более двух рядом стоящих единиц. (Например, последовательность 011001 разрешена, последовательность 011101 не разрешена.) Найдите число последовательностей, состоящих ровно из 12 символов.

2. Пусть  $ABCD$  – параллелограмм на плоскости. Проведены две окружности, каждая имеет радиус  $R$ . Первая окружность проходит через точки  $A$  и  $B$ , вторая – через точки  $B$  и  $C$ . Пусть  $E$  – вторая точка пересечения окружностей. Известно, что  $E$  – не вершина параллелограмма. Докажите, что окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $D$ , и  $E$  также имеет радиус  $R$ .

3. Пусть  $a, b, c$  – положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

и определите, в каком случае достигается равенство.

4. Пусть  $f(x)$  – функция, заданная на множестве неотрицательных целых чисел  $\{0, 1, 2, \dots\}$  и удовлетворяющая условиям

$$f(2x) = 2f(x), \quad f(4x + 1) = 4f(x) + 3, \quad f(4x - 1) = 2f(2x - 1) - 1$$

Докажите, что если для некоторой пары аргументов  $(x, y)$  выполняется  $f(x) = f(y)$ , то из этого следует, что  $x = y$ .

5. Разность двух целых чисел, являющихся кубами двух последовательных целых чисел, является числом  $n^2$ , где  $n$  – натуральное число. Докажите, что  $n$  представляется в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

- Решения задач необходимо написать на бумаге, сканировать и отправить не позднее 20 декабря 2024 г. по электронной почте.
- Вопросы по условиям задач можно задать по электронной почте.
- Не предполагается, что все команды-участники турнира решат все задачи, тем не менее, чем больше задач выполнено, тем выше рейтинг команды. Имеет смысл отправить все решения, в которых имеется хотя бы частичное продвижение.