Олимпиада по математике
6 класс
2019 г.

1. Сколько существует трехзначных чисел, обладающих одновременно двумя свойствами: сумма цифр этого числа совпадает с числом, записанным первыми двумя цифрами этого числа, также число является квадратом натурального числа?

   Решение. Сумма цифр трехзначного числа не превосходит 27. Поэтому необходимо перебрать все числа вида

   $$10*, 11*, 12*, 13*, \ldots, 25*, 26*, 27*$$

   Проще всего выписать трехзначные квадраты

   $$100, 121, 144, 169, 196, 225, 256$$

   и проверкой убедиться, что подходит только 169.
   Ответ: одно число 169.

   Критерии: полное решение – 7 баллов; написан перебор от 100 до 999, проверены все квадраты – 7 баллов; написан перебор от 100 до 256, без обяснения, почему остановились – 4 балла; указано, что сумма чисел не превосходит 27 без дальнейшего продвижения – 3 балла; написано, что только одно число 169, без доказательства – 1 балл.

2. Как разделить поровну семь одинаковых пирожных между 12 гостями дня рождения, если ни одно пирожное невозможно разрезать более, чем на пять частей?

   Решение. Надо сначала разделить между гостями три пирожных (каждому достанется по четверти пирожного), а затем разделить между ними оставшиеся четыре пирожных (каждому – по трети).

   Критерии: полное решение в виде дробей, равных величинам кусочков пирожных – 7 баллов; арифметическая ошибка в работе с дробями (при сложении числителей) – 2 балла.

3. Маша и Медведь играли в шахматы на орехи. Сначала Медведь проиграл половину своих орехов Маше и отдал их, потом Маша проиграла половину своих орехов, потом снова Медведь проиграл половину своих орехов. В результате у Медведя после трех игр оказалось 35 орехов, а у Маши – 77. Сколько орехов было у Маши и сколько у Медведя перед началом игры?

   Решение. Обратный ход числа орехов у Медведя и у Маши: 35 и 77, 70 и 42, 28 и 84, 56 и 56.
   Ответ: 56 и 56.

   Критерии: полное решение – 7 баллов; арифметическая ошибка в удвоении, сложении или вычитании снижает оценку на 2 балла; неверное применение обратного хода – 0 баллов.

4. Города A, B, C вместе с соединяющими их прямыми дорогами образуют треугольник. Известно, что прямой путь из A в B на 200 км короче, чем объезд через C, а прямой путь из A в C на 300 км короче, чем объезд через B. Найдите расстояние между городами B и C.

   Решение. Рассмотрим путь из B в C через A, $B-A-C$. Длина отрезка BA на 200 км меньше длины пути $B-C-A$, а длина отрезка AC на 300 км меньше длины пути $A-B-C$. Поэтому такой путь окажется на 500 км короче пути $B-C-A-B-C$. (Обходим треугольник ABC и еще один раз сторону BC.) Но этот путь отличается от пути $B-A-C$ на два отрезка BC. Поэтому длина отрезка BC вдвое меньше, чем 500 км, т.е. 250 км.
   Ответ: 250 км.

   Критерии: полное решение – 7 баллов; попытка построить путь и выделение отрезка BC, без нахождения его длины – 2 балла. Допускается полное верное решение через систему двух уравнений, также оцениваемое в 7 баллов.

5. Если каждой девочке дать по одной шоколадке, а каждому мальчику по две, то шоколадок хватит. А если каждой девочке дать по две шоколадки, а каждому мальчику по одной, то шоколадок не хватит. А если девочкам вообще не давать шоколадки, то хватит ли в этом случае мальчикам по три шоколадки?

   Решение. Девочек и мальчиков не может быть поровну, иначе каждый мальчик с двумя шоколадками передает одну шоколадку девочке, и девочкам хватает по две шоколадки. Если мальчиков больше, то каждая девочка с одной шоколадкой берет одного мальчика с двумя шоколадками в пару, после чего мальчик отдает ей одну шоколадку. В этом случае шоколадок хватит, что противоречит условию. Итак, девочек больше, чем мальчиков. Пусть у каждого мальчика – по две шоколадки, а у девочек – по одной. Пусть каждый мальчик возьмет в пару девочку и заберет ее шоколадку. Те девочки, которые остались без мальчика и с одной шоколадкой, отдадут шоколадку обратно. Получили требуемую конфигурацию, и шоколадок хватает.

   Критерии: полное решение – 7 баллов; доказано, что девочек больше – 4 балла; показано, что шоколадок хватит, в предположении, что девочек больше, но это предположение не доказано, – 3 балла; приведен правильный численный пример с проверками – 1 балл.

6. Серверы соединены в сеть и рассылают сообщения друг другу. Оказалось, что в течение некоторого промежутка времени каждый сервер отправил в сеть одинаковое количество сообщений, каждое из которых получили все, кроме отправляющего сервера. Всего за этот промежуток времени было получено 440 сообщений. Сколько серверов могло быть в этой сети?

Решение. Пусть в сети n серверов, каждый отправил k сообщений. Тогда от одного сервера к другим пришло $k\cdot(n-1)$ сообщений, а всего пришло $k\cdot(n-1)\cdot n$ сообщений. Значит, $440 = k\cdot(n-1)\cdot n$, т.е. 440 раскладывается в произведение трех множителей, два из которых отличаются на 1. $440 = 2^3\cdot 5\cdot 11$. Заметим, что $n < 22$, так как $21\cdot 22 = 462 > 440$. Перебираем в разложении степени двойки, получаем два множителя, отличающихся друг от друга на 1 (только пара 5 и 11, очевидно, не дает решения).

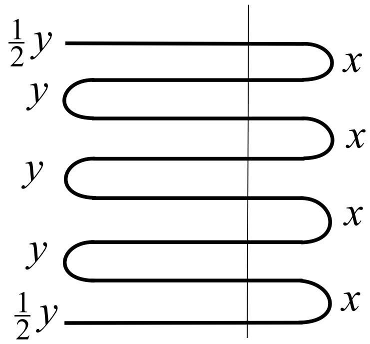
$$440 = 1\cdot 2\cdot 220 = 4\cdot 5\cdot 22 = 4\cdot 10\cdot 11$$

Восьмерка нужной пары не дает. Число серверов - больший множитель из пары последовательных чисел.
Ответ: 2, 5 или 11.

Критерии: полное решение – 7 баллов; при полном правильном решении допущена одна арифметическая ошибка, не повлиявшая на ход решения (в решении содержатся два последовательных множителя) – 6 баллов; выбраны нужные переменные и составлены соответствующие условия с этими переменными, найдены две пары последовательных множителей и построено два ответа – 5 баллов; выбраны нужные переменные и составлены соответствующие условия с этими переменными, найдена только одна пара последовательных множителей и построен один ответ – 4 балла; выбраны нужные переменные и составлены соответствующие условия с этими переменными, дальнейшего продвижения нет – 2 балла; приведен правильный численный пример, или два, или все три примера, с проверками, отсутствие других решений не доказано, – 1 балл; приведен один численный ответ или два или все три ответа без проверок и без обоснования – 0 баллов.

7. Веревочку сложили пополам, затем еще раз пополам, и затем еще раз пополам. Потом сложенную веревочку перерезали в одном месте. Она распалась на куски. Какой длины могла быть веревочка, если среди этих кусков оказались два известной длины, один 12 см, второй 7 см?

Решение.

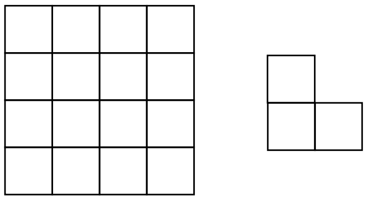


Если правильно сложить веревочку, а затем разрезать, то получатся куски трех видов (см. рис.). Длины этих кусков обозначим x, y, $\dfrac{1}{2}y$. Длина веревочки получится равной $4x+3y+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}y=4(x+y)$. Два данных куска не могут образовать пару y, $\dfrac{1}{2}y$. Получаем четыре варианта: $x=12, y=7; x=7, y=12$; $x=12, \frac{1}{2}y=7,\ x=7; \frac{1}{2}y=12$. Этим вариантам соответствует длина веревочки 76, 76, 104, 124.

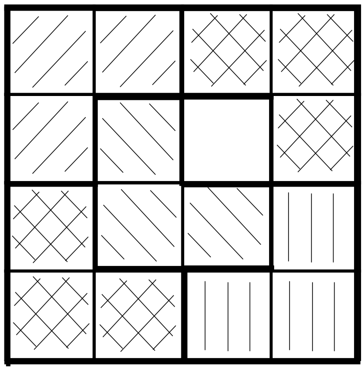
Ответ: 76, 104, 124.

Критерии: полное решение – 7 баллов; приведен лишний вариант ответа, при правильном рисунке (подходе) – 4 балла; приведено только два варианта ответа, при правильном рисунке (подходе) – 4 балла; приведен только один вариант ответа, при правильном рисунке (подходе) – 3 балла; на одном рисунке для одного варианта расставлены длины отрезков, но не найдена длина веревочки – 1 балл; указано, что длина веревочки равна $4(x+y)$, но длины отрезков не расставлены – 1 балл; арифметическая ошибка в вычислениях снижает оценку на 1 балл.

8. На клечатой доске 4×4 Вася закрашивает несколько клеток. После этого Олег раскладывает на доске по своему усмотрению уголки из трех клеток. (За границы квадрата выходить нельзя, накладывать уголки друг на друга нельзя.) Олег выиграет, если все закрашенные клетки окажутся покрыты уголками, незакрашенные клетки могут быть как покрыты, так и не покрыты. Какое наименьшее количество клеток должен закрасить Вася, чтобы Олег гарантированно не выиграл?



Решение.



Пятнадцать и меньше любых закрашенных клеток покрываются такими уголками, см. рисунок. Действительно, разделим квадрат из 16 клеток на четыре квадрата по 4 клетки. Одна незакрашенная клетка принадлежит какому-то одному такому квадрату, и три оставшиеся клетки этого квадрата покрываются уголком. Оставшиеся три квадрата полностью покрываются уголками, как показано на рисунке. Олег при таком покрытии покрывает все закрашенные Васей клетки, если их 15 и меньше. Поэтому Олег гарантированно выиграет, если Вася не закрасит все клетки. Шестнадцать клеток нельзя покрыть уголками по три клетки, так как 16 на 3 не делится.
Ответ: Вася должен закрасить все клетки (наименьшее количество - 16).

Критерии: полное решение – 7 баллов; решение, в котором не хватает только доказательства того, что все 16 клеток нельзя покрыть уголками, – 6 баллов; доказано, что любые 15 клеток обязательно покрываются, но ответ неправильный из-за путаницы в логике (наименьшее - наибольшее количество, могут быть покрыты - гарантированно будут покрыты) – 5 баллов; только правильный ответ с указанием, что 16 клеток покрыть нельзя, но без доказательства, что любые 15 клеток обязательно покрываются – 3 балла; приведен один пример раскраски и покрытия, без обобщения, – 1 балл.

9. Семь команд сыграли футбольный турнир, каждая сыграла с каждой. За победу дают 3 очка, за ничью - 1 очко, за проигрыш - 0 очков. Команды расположились в турнире, набрав 14, 13, 9, 8, 7, 4, 3 очков. Сколько сыграно ничьих?

   Решение. Всего сыграна 21 игра. Для доказательства можно построить турнирную таблицу, не содержащую диагональные клетки, а затем поделить 42 клетки пополам, так как в таблице каждая игра записывается дважды. Можно иначе: каждая команда проводит шесть игр, всего команд семь, при таком подсчете каждая игра учитывается дважды. Если бы ничьих не было, разыгрывались бы $21 \cdot 3 = 63$ очка. Каждая ничья дает командам вместе 2 очка, т.е. из общей суммы очков вычитается 1 очко. Всего в турнире набрано 58 очков и потеряно $63 - 58 = 5$ очков. Значит, сыграно 5 ничьих.
   Ответ: 5 ничьих.

   Критерии: полное решение – 7 баллов; определено число игр – 3 балла, указано, что каждая ничья выводит из общей суммы очков 1 балл – 3 балла; приведена турнирная таблица с пятью ничьими - 7 баллов (она единственна с точностью до перестановки команд, но доказать этот факт шестикласснику, наверно, невозможно). Существование такой возможности распределения очков доказывать не требуется. Построение турнирной таблицы - отдельная, достаточно сложная, задача.

10. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причём Оля выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

   Решение. Пусть n — количество выпитых чашек, оно равно числу человек в семье, а x — количество выпитого молока, измеренное в чашках (на данный момент x может быть нецелым). Тогда количество выпитого кофе равно $n - x$. Оля выпила одну чашку кофе с молоком, которая состояла из одной четверти всего молока $\frac{x}{4}$ и одной шестой всего кофе $\frac{n-x}{6}$. Получаем уравнение

$$\frac{x}{4} + \frac{n-x}{6} = 1$$
$$3x + 2(n-x) = 12$$
$$x + 2n = 12$$

   Так как n – целое, то x – тоже целое.
   Перебором находим, что $n = 6$, $x = 0$ или $n = 5$, $x = 2$ или $n = 4$, $x = 4$.
   Подходит только $n = 5$, $x = 2$, так как в остальных случаях или пили кофе без молока, или молоко без кофе.
   Ответ: 5 человек.

   Критерии: полное решение – 7 баллов; полный обоснованный ответ, в который включены случаи чистого кофе и чистого молока – 6 баллов, верное решение, в котором не указано, что x получается целым – 5 баллов; составлено уравнение или верные пропорции, решение в целых числах не получено – 3 балла; приведен ответ с проверкой, что условие выполнено, но отсутствие других ответов не доказано – 1 балл; ответ без проверки – 0 баллов.