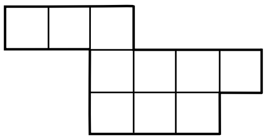
ГБУ ДО Центр "Интеллект"

Олимпиада по математике, 6 класс

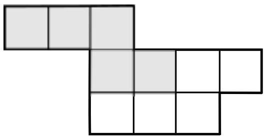
2020 г.

Решения и критерии проверки

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на две части, одинаковые и по форме, и по площади.



Решение.



Критерии оценивания. Фигура разрезана – 7 баллов. Фигура не разрезана или разрезана неправильно – 0 баллов.

2. Взяли трехзначное число и переставили его цифры в обратном порядке. Может ли сумма двух трехзначных чисел – полученного числа и исходного числа – быть числом, записанным только нечетными цифрами?
Решение. Да, возможно. Необходимо сделать перенос единицы из последнего разряда во второй. Если переноса не будет, в среднем разряде суммы будет стоять четная цифра. Пример

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 3 & 2 \\ + & 2 & 3 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 7 & 1 \end{array}$$

Критерии оценивания. Приведен пример – 7 баллов. Арифметическая ошибка в примере – 6 баллов. Ответ неверный («не может») или пример не приведен – 0 баллов.

3. Делится ли число $2020^{2222} + 2222^{2020}$ на 101?

Решение. Делится, так как каждое слагаемое делится на 101.

Критерии оценивания. Верный ответ, при этом верно указано, что каждое из слагаемых, представляющее собой степень, делится на 101 – 7 баллов. Замечено, что каждое из чисел 2020 и 2222 делится на 101 – 1 балл. Решение неверное, включая случаи неверных алгебраических преобразований, или ответ неверный – 0 баллов.

4. Маше днем подарили новогодний подарок – мешочек с конфетами. Каждый вечер Маша съедала треть имеющихся в мешочке конфет, а каждое утро – две конфеты. В четвертый вечер Маша обнаружила в мешочке всего две конфеты, которые тут же съела. Сколько всего конфет было в подарке?

   Решение. Обратный ход.

$$2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 12 \to 14 \to 21 \tag{1}$$

   Ответ. 21 конфета.

   Критерии оценивания. Верное решение, верный ответ – 7 баллов. Вычислительная ошибка в итоговом суммировании конфет (слагаемые определены верно) – 6 баллов. Ошибка в числе дней (добавлен или не учтен один день) – 3 балла. Неверное решение, неверный ответ – 0 баллов.

5. В первый день месяца за один талер на бирже давали 59 тугриков, во второй день месяца за один талер давали уже 57 тугриков, а в третий день – 55 тугриков. В четвертый день месяца курс талера к тугрику составил среднее арифметическое курса в первые три дня (*за один талер давали количество тугриков, составляющее среднее арифметическое соответствующих величин в предыдущие дни*). В пятый день курс талера к тугрику составил среднее арифметическое курса в первые четыре дня, и далее каждый день курс составлял среднее арифметическое курсов в предыдущие дни. Определите, сколько тугриков давали за один талер в тридцать первый день месяца.

   Решение. Найдем среднее значение курса в первые три дня.

$$\frac{59+57+55}{3} = 57 \tag{2}$$

   В четвертый день курс был равен 57. Добавим этот курс в среднее арифметическое

$$\frac{59+57+55+57}{4} = 57 \tag{3}$$

   Если в набор чисел добавить число, равное среднему арифметическому, то среднее арифметическое не изменится

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = s, \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+s}{n+1} = \frac{s\cdot n+s}{n+1} = s \tag{4}$$

   Поэтому дальше курс меняться не будет.

   Ответ. 57 тугриков за один талер.

   Критерии оценивания. В работе может быть сформулировано утверждение «Если к набору чисел добавить число, равное их среднему арифметическому, и вычислить среднее арифметическое полученного набора, то получится среднее арифметическое первоначального набора». Формулировка должна быть правильной. Доказательство приводить не требуется.
   Верное решение – 7 баллов. Нечеткая формулировка утверждения о средних (допускающая неверное трактование) – 6 баллов. Найдено верное значение курса в четвертый, пятый, шестой дни, но значения курса в следующие дни не найдено или приводится без обоснования – 3 балла. Неверный ответ при сформулированной, но необоснованной идее о сохранении курса – 1 балл. Неверное решение, ответ без обоснований – 0 баллов.

6. Оля выпила одну третью часть стакана кофе, после этого она долила в стакан молоко до первоначального объема. Затем она выпила полстакана получившегося кофе с молоком, после этого снова наполнила стакан, долив в него молоко. Далее Оля выпила одну шестую часть стакана, и снова наполнила стакан, долив молоко. Наконец, она выпила получившийся напиток полностью, весь стакан. Какой объем кофе и какой объем молока выпила Оля?

   Решение. Так как и кофе, и молоко выпито полностью, то объем выпитого кофе - один стакан, и объем выпитого молока - один стакан $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$.

   Ответ. Оля выпила стакан кофе и стакан молока.

   Критерии оценивания. Верное решение – 7 баллов. Ошибка в суммировании дробей (идея решения верная) – 6 баллов. Правильно найден объем выпитого кофе или объем выпитого молока – 3 балла. Неверное решение, ответ без обоснования – 0 баллов.

7. В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке равна 100, и сумма чисел в любом столбце равна 100. Докажите, что $m = n$.

   Решение. В каждой строке сумма чисел равна 100, значит, сумма всех чисел в таблице равна $100m$. В каждом столбце сумма чисел равна 100, значит, сумма всех чисел в таблице равна $100n$. Отсюда $m = n$.

   Критерии оценивания. Верное решение – 7 баллов. Приведен пример квадрата и показано, как расставить числа (показано, что условие задачи может выполняться) – 1 балл. Неверное решение, ответ без обоснования – 0 баллов.

8. Докажите, что если взять географическую карту и выбрать на ней любые шесть городов, то окажется верным по крайней мере одно утверждение из двух: среди этих шести городов найдутся три города, попарно связанные прямыми дорогами, или найдутся три города, между которыми нет связывающих их прямых дорог. (*Прямая дорога между двумя городами – это дорога, выходящая из одного города и заканчивающаяся в другом, не проходящая через третий город*).

   Решение. Выберем произвольный город из нашей шестерки городов, назовем его A. Существуют две взаимоисключающие возможности: город A связан с тремя или больше городами, или город A связан с двумя и менее городами.

   Рассматриваем первый случай. Среди группы городов, с которыми связан город A, найдется хотя бы одна пара связанных между собой городов. Тогда они вместе с A образуют связанную тройку. Если среди городов, связанных с A, ни одной пары связанных нет, то нашлось по крайней мере три города, попарно не связанные между собой.

   Второй случай. Город A не связан с тройкой городов. Если в этой тройке нашлась несвязанная между собой пара, то вместе с городом A получаем тройку попарно несвязанных городов. Если среди городов, не связанных с A, не нашлось несвязанной тройки, то все эти города попарно связаны.

   Критерии оценивания. Верное решение – 7 баллов. Решение может состоять из перебора различных случаев группировки городов и связывающих их дорог (перебор разных графов). Если доказано, что разобраны все возможные случаи, то такое решение оценивается в 7 баллов. Если разобраны все возможные случаи, но не доказано, что перебор выполнен полностью – 5 баллов. Если разобраны отдельные случаи, не образующие полный перебор, включающие хотя бы один случай неуединенной вершины графа – 3 балла. Если разобран случай уединенной вершины графа (один или два города, не связанные с остальными) – 2 балла. Нарисован пример – 1 балл. Неверное обоснование, нет решение – 0 баллов.

9. На соревнования по многоборью от каждой секции спортклуба было приглашено по пять спортсменов. Руководитель спортклуба составил команду из спортсменов, каждый из которых занимается ровно в двух секциях. Также любая пара секций была представлена по крайней мере одним спортсменом. Сколько секций в спортклубе и сколько спортсменов было направлено на соревнования?

   Решение. Пусть число секций n. Тогда число спортсменов $\frac{5n}{2}$. Здесь учтено, что каждый спортсмен представляет ровно две секции. Если секций больше, чем 6, то каждая секция должна делегировать больше пяти спортсменов (каждая пара секций представлена на соревнованиях), а это противоречит условию. Итак, секций не больше 6, и $\frac{5n}{2}$ – целое число. Значит, $n = 2$ или $n = 4$ или $n = 6$. Примеры. При $n = 2$ секций всего две, спортсменов 5. При $n = 4$ две пары секций представлены одним спортсменом, остальные пары секций – двумя спортсменами, всего спортсменов 10. При $n = 6$ каждая пара секций делегирует одного спортсмена, всего из 15.

   Ответ. 2 секции, 5 спортсменов, 4 секции, 10 спортсменов, 6 секций, 15 спортсменов.

   Критерии оценивания. Верное решение – 7 баллов. Возможные численные ответы получены, но примеры не построены – 4 балла. Получен ответ для одного значения числа секций и приведен пример – 3 балла. Получен ответ для одного значения числа секций, пример не приведен – 1 балл. Решения нет, ответ неверный, верный ответ не обоснован – 0 баллов.