Задачи Математического турнира «Шаг в математику»

1 Командная олимпиада математического турнира 27.10 2020 г.

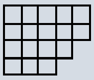
Задачи:

1. 2 балла Найдите все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр, и докажите, что других нет.

2. 2 балла Произведение 82 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

3. 2 балла Решить в целых числах уравнение $(2x + y)(5x + 3y) = 7$, то есть найти все целые решения и доказать, что других нет.

4. 2 балла Вырежьте из фигуры, изображенной на рисунке, одну клетку, и разрежьте оставшуюся фигуру на четыре равные части.



5. 2 балла На 99 карточках пишутся числа 1, 2, 3, ..., 99. Затем карточки перемешиваются, раскладываются чистыми сторонами вверх и на чистых сторонах снова пишутся числа 1, 2, 3, 4, ..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Доказать, что в результате получится чётное число.

6. 2 балла Может ли горящая в комнате свеча не освещать полностью ни одну из её стен, если в комнате 6 стен? Комната может иметь произвольную форму – не обязательно правильного шестиугольника.

2 Командная олимпиада математического турнира 27.10 2020 г.

Задачи:

1. 3 балла Дан мешок сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Можно ли за 10 взвешиваний отмерить 1 кг сахара?

2. 2 балла Числа a, b и c отличны от нуля и выполняются равенства:

$a + {}^{b}/_{c} = b + {}^{c}/_{a} = c + {}^{a}/_{b} = 1.$

Докажите, что $ab + bc + ca = 0$.

3. 3 балла Можно ли расставить на ребрах куба числа от 1 до 12 так, чтобы все суммы чисел на гранях были одинаковыми?

4. 3 балла 12 спичками несложно ограничить квадрат площадью 9 клеточек со стороной в 1 спичку. А как ограничить теми же спичками фигуру с площадью 4 такие же клеточки? Спички нельзя ломать и накладывать одну на другую.

5. 2 балла Высота комнаты 3 метра. При её ремонте выяснилось, что на каждую стену уходит краски больше, чем на пол.

Может ли площадь пола этой комнаты быть больше, чем 10 квадратных метров?

6. 4 балла Сломанный калькулятор выполняет только одну операцию "звездочка": $a \star b = 1 - a : b$.

Докажите, что с помощью этого калькулятора все же возможно выполнить каждое из четырёх арифметических действий.

Задачи Матбой номер 1

1. Дано 100 натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 5051. Найти все наборы чисел с таким условием и доказать, что других нет.

2. Прямоугольник разбили двумя прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника. Один из них оказался квадратом, а периметры прямоугольников, соседних с ним, равны 20 см и 16 см. Найдите площадь исходного прямоугольника.

3. Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения встали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник однозначно определил, какую долю от всех жителей селения составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

4. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

5. Можно ли из 18 доминошек 1×2 выложить квадрат 6×6 так, чтобы при этом не получалось ни одного прямого "шва" внутри квадрата, соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток?

6. Прямая раскрашена в два цвета (произвольным образом). Докажите, что найдётся отрезок, оба конца и середина которого покрашены в один и тот же цвет.

Задачи. Матбой номер 2

1. Для чисел a, b и c (не обязательно целых) выполняется равенство $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$

Следует ли из него, что $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$?

2. Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает быстрее сына?

3. Верно ли, что к каждому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце две цифры так, что получится квадрат натурального числа?

4. Разрежьте по клеточкам квадрат 7×7 на девять прямоугольников (не обязательно различных), из которых можно будет сложить любой прямоугольник со сторонами, не превосходящими 7.

5. a и b – натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab.

Докажите, что $a = b$.

6. Даны 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их попарных разностей найдутся четыре одинаковых.

Задачи Матбой номер 3

1. Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, ..., 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

2. Даны два двузначных числа – X и Y. Известно, что X вдвое больше Y, одна цифра числа Y равна сумме, а другая – разности цифр числа X.

Найти все такие пары чисел и доказать, что других нет.

3. Перед началом чемпионата школы по шахматам каждый из участников сказал, какое место он рассчитывает занять. Семиклассник Ваня сказал, что займёт последнее место. По итогам чемпионата все заняли различные места, и оказалось, что каждый, кроме, разумеется, Вани, занял место хуже, чем ожидал. Какое место занял Ваня?

4. В таблице 10×10 расставлены целые числа, причём каждые два числа в соседних клетках отличаются не более чем на 5.

Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы два равных.

5. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и –1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной.

Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

6. В плоскости отмечена 101 точка, не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красным карандашом проводится прямая. Докажите, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.