«Шаг в математику» — условия

Первый тур. Лига А.

1. На чемпионате по футболу в некоторый момент было сыграно 9 матчей. Известно, что все команды сыграли одинаковое количество матчей, при этом любые две команды играли друг с другом не более одного раза. Одна из команд набрала 4 очка (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко). Сколько команд участвовало в чемпионате?

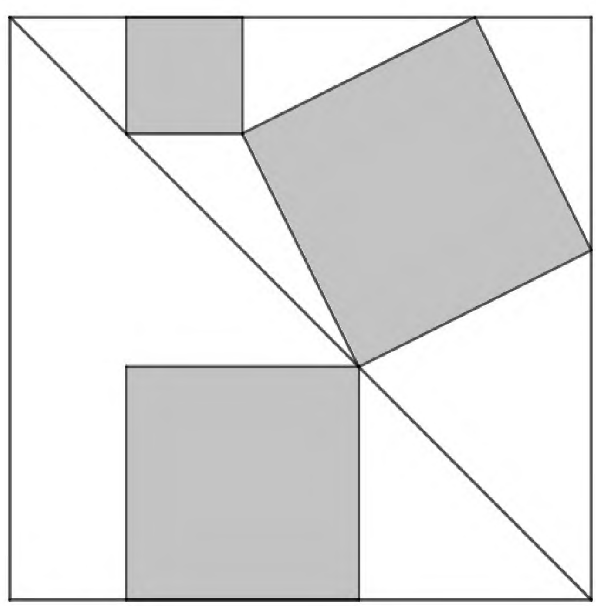
2. Доску размера 10×15 распилили на прямоугольники, каждый из которых имеет размер 1×6 или 2×3. Какое наибольшее количество прямоугольников первого типа могло получиться?

3. Найдите наибольшее число, у которого каждая некрайняя цифра равна разности своего правого и левого соседа.

4. В группу детского сада ходит 11 детей, причем у всех них разные имена. Как-то раз дети решили поиграть в догонялки, а воспитательница тетя Маша решила записывать в столбик имена водящих. Когда игра закончилась, тетя Маша заметила, что в ее списке 7 строк с именами (не обязательно различными), причем первым и последним водящим был Артём. Сколько различных списков могло получиться у тети Маши при указанных условиях?

5. Дано четыре различных натуральных числа. Докажите, что их удвоенное произведение больше, чем сумма всех попарных произведений этих чисел.

6. Найдите, какую часть площади большого квадрата составляет сумма площадей трех серых квадратов.



Первый тур. Лига B.

1. На чемпионате по футболу в некоторый момент было сыграно 9 матчей. Известно, что все команды сыграли одинаковое количество матчей, при этом любые две команды играли друг с другом не более одного раза. Одна из команд набрала 4 очка (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко). Сколько команд участвовало в чемпионате?

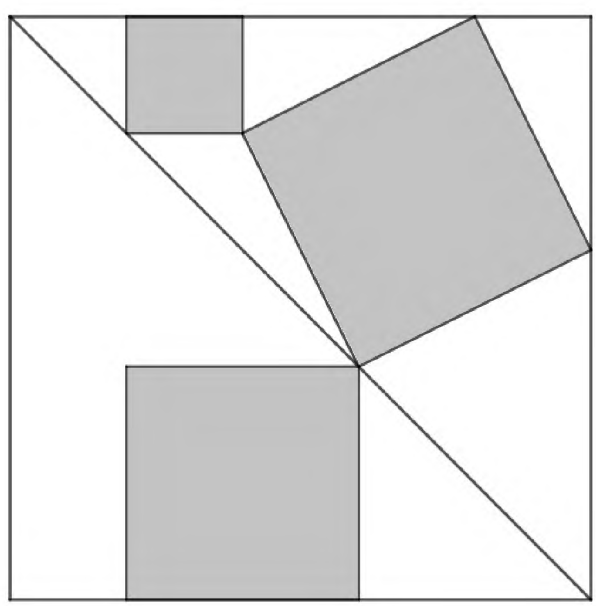
2. Доску размера 10×15 распилили на прямоугольники, каждый из которых имеет размер 1×6 или 2×3. Какое наибольшее количество прямоугольников первого типа могло получиться?

3. Найдите наибольшее число, у которого каждая некрайняя цифра равна разности своего правого и левого соседа.

4. В группу детского сада ходит 11 детей, причем у всех них разные имена. Как-то раз дети решили поиграть в догонялки, а воспитательница тетя Маша решила записывать в столбик имена водящих. Когда игра закончилась, тетя Маша заметила, что в ее списке 7 строк с именами (не обязательно различными), причем первым и последним водящим был Артём. Сколько различных списков могло получиться у тети Маши при указанных условиях?

5. Решите уравнение в целых числах $y^{n+1} = x^2 + x$, где n — натуральное число.

6. Найдите, какую часть площади большого квадрата составляет сумма площадей трех серых квадратов.



Первый тур. Лига С.

1. На чемпионате по футболу в некоторый момент было сыграно 9 матчей. Известно, что все команды сыграли одинаковое количество матчей, при этом любые две команды играли друг с другом не более одного раза. Одна из команд набрала 4 очка (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко). Сколько команд участвовало в чемпионате?

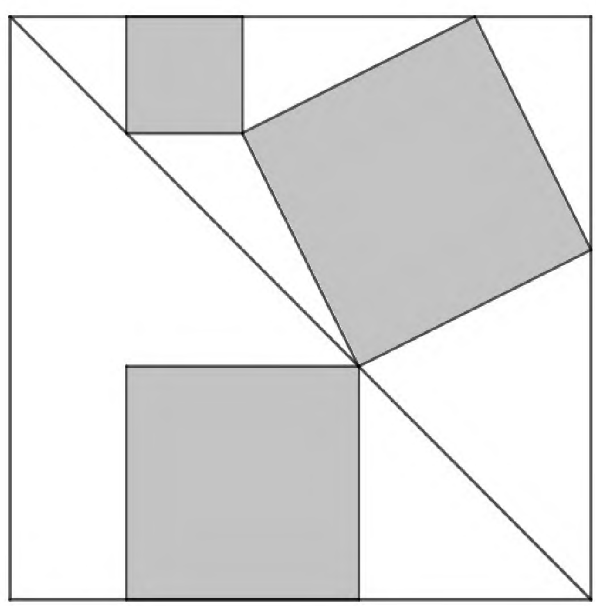
2. Доску размера 10×15 распилили на прямоугольники, каждый из которых имеет размер 1×6 или 2×3. Какое наибольшее количество прямоугольников первого типа могло получиться?

3. Найдите наибольшее число, у которого каждая некрайняя цифра равна разности своего правого и левого соседа.

4. Вася одновременно получил N задач с номерами от 1 до N. Каждая задача имеет свой крайний срок сдачи: k-ую задачу необходимо сдать не позднее, чем через $\frac{k}{2} + 47$ минут после начала. Вася знает, что на выполнение k-ой задачи у него уйдёт ровно k минут. При каком максимальном N Вася успеет сдать все задачи, если одновременно он может решать не более одной задачи?

5. Решите уравнение в целых числах $y^{n+1} = x^2 + x$, где n — натуральное число.

6. Найдите, какую часть площади большого квадрата составляет сумма площадей трех серых квадратов.



Второй тур. Лига А.

1. У Дениса есть 5 кружек: черно-красно-желтая, красно-белая, красная, синяя и зеленая. Он хочет расставить их на полке в ряд таким образом, чтобы соседние кружки не имели общего цвета. Каким количеством способов он может это сделать?

2. На чемпионате по нардам каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих не бывает. По результатам турнира каждый участник получил $A^2 - B^2$ очков, где A — количество побед этого участника, B — количество поражений (могло получиться отрицательное число очков). Сложив очки первой тройки лидеров, получили число 1440. Сколько суммарно очков набрали остальные игроки?

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$. Точка M является серединой стороны BC, при этом градусная мера $\angle CDM$ в 2 раза больше градусной меры $\angle BDM$. В треугольнике MCD из $\angle C$ проведена высота CH. Найдите длину MH.

4. Двое играют в следующую игру: на центральном узле клетчатого квадрата 10×10 стоит фишка. За один ход можно переносить фишку на любой другой узел квадрата, в том числе на границе, но так, чтобы длина хода (то есть расстояние, на которое передвинули фишку) была больше, чем длина предыдущего хода, сделанного соперником. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. Имеется 59 единиц. Вася «склеивает» эти единицы в числа (например, в 1, 111, 11111111 и т.п.). Какое максимальное количество различных попарно взаимно простых чисел он может получить таким образом? (Не обязательно использовать все единицы.)

6. Сидя за столиком в кафе, Петя и Вася насчитали 111 «ног» в кафе. Известно, что все столики имеют по три ножки, стулья — по четыре, люди — по две. Вася приметил, что за каждым столиком находится от 2 до 5 стульев. Петя обратил внимание, что людей в зале нечетное количество и все они сидят на стульях. Какое минимальное количество стульев могло быть в кафе?

Второй тур. Лига B.

1. У Дениса есть 5 кружек: черно-красно-желтая, красно-белая, красная, синяя и зеленая. Он хочет расставить их на полке в ряд таким образом, чтобы соседние кружки не имели общего цвета. Каким количеством способов он может это сделать?

2. На чемпионате по нардам каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих не бывает. По результатам турнира каждый участник получил $A^2 - B^2$ очков, где A — количество побед этого участника, B — количество поражений (могло получиться отрицательное число очков). Сложив очки первой тройки лидеров, получили число 1440. Сколько суммарно очков набрали остальные игроки?

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$. Точка M является серединой стороны BC, при этом градусная мера $\angle CDM$ в 2 раза больше градусной меры $\angle BDM$. В треугольнике MCD из $\angle C$ проведена высота CH. Найдите длину MH.

4. Двое играют в следующую игру: на центральном узле клетчатого квадрата 10×10 стоит фишка. За один ход можно переносить фишку на любой другой узел квадрата, в том числе на границе, но так, чтобы длина хода (то есть расстояние, на которое передвинули фишку) была больше, чем длина предыдущего хода, сделанного соперником. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. По кругу стоят 253 занумерованных от 1 до 253 свечек. Вася хочет зажечь некоторые из них так, чтобы не было 23 подряд горящих свечек. При этом Вася хочет зажечь максимально возможное число свечек. Сколькими способами он может это сделать?

6. Сидя за столиком в кафе, Петя и Вася насчитали 111 «ног» в кафе. Известно, что все столики имеют по три ножки, стулья — по четыре, люди — по две. Вася приметил, что за каждым столиком находится от 2 до 5 стульев. Петя обратил внимание, что людей в зале нечетное количество и все они сидят на стульях. Какое минимальное количество стульев могло быть в кафе?

Второй тур. Лига С.

1. У Дениса есть 5 кружек: черно-красно-желтая, красно-белая, красная, синяя и зеленая. Он хочет расставить их на полке в ряд таким образом, чтобы соседние кружки не имели общего цвета. Каким количеством способов он может это сделать?

2. На чемпионате по нардам каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих не бывает. По результатам турнира каждый участник получил $A^2 - B^2$ очков, где A — количество побед этого участника, B — количество поражений (могло получиться отрицательное число очков). Сложив очки первой тройки лидеров, получили число 1440. Сколько суммарно очков набрали остальные игроки?

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$. Точка M является серединой стороны BC, при этом градусная мера $\angle CDM$ в 2 раза больше градусной меры $\angle BDM$. В треугольнике MCD из $\angle C$ проведена высота CH. Найдите длину MH.

4. Про положительные числа n, m, k известно, что $\frac{n}{m+k} = \frac{m}{n+k} = \frac{k}{n+m}$. Докажите, что $\frac{(n+m)^2}{k^2} + \frac{(m+k)^2}{n^2} + \frac{(n+k)^2}{m^2} = 12$.

5. По кругу стоят 253 занумерованных от 1 до 253 свечек. Вася хочет зажечь некоторые из них так, чтобы не было 23 подряд горящих свечек. При этом Вася хочет зажечь максимально возможное число свечек. Сколькими способами он может это сделать?

6. Сидя за столиком в кафе, Петя и Вася насчитали 111 «ног» в кафе. Известно, что все столики имеют по три ножки, стулья — по четыре, люди — по две. Вася приметил, что за каждым столиком находится от 2 до 5 стульев. Петя обратил внимание, что людей в зале нечетное количество и все они сидят на стульях. Какое минимальное количество стульев могло быть в кафе?

Третий тур. Лига А.

1. В центре «Интеллект» проводится олимпиада по математике. В здании имеется 9 аудиторий размера 9 м $\times$ 9 м. В связи с антиковидными ограничениями, во время решения задач, участники в одной аудитории должны находиться не менее, чем на 4.3 м друг от друга. Какое максимальное количество человек может писать эту олимпиаду? (Участников можно воспринимать как материальную точку.)

2. На полке стоит $N > 100$ кружек. Денис за ход дополнительно ставит на полку от 1 до 3 кружек. Таня же за ход может убрать любое количество кружек, кратное 3, 5 или 7. Денис и Таня ходят по очереди, причем начинает Денис. Докажите, что Тане потребуется не более 2 ходов, чтобы оставить полку пустой вне зависимости от ходов Дениса.

3. $ABCD$ — прямоугольник. Отношение сторон $AB : BC = 1 : 7$. На BC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает диагонали прямоугольника AC и BD в точках P и Q соответственно. Найдите площадь четырехугольника $PBCQ$, если $BC = 14$.

4. На планете УноГолова проживают инопланетяне 2 типов:
   · с 1 головой, 2 руками и 3 ногами
   · с 1 головой, 3 руками и 2 ногами
   Выяснилось, что всего на этой планете 57 голов, общее число рук делится на 4, общее количество ног делится на 5. Сколько всего ног могло быть на этой планете? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

5. На доске написано два различных натуральных числа, не превосходящих 2022. Можно заменить одно из чисел на их среднее арифметическое. Какое наибольшее таких замен можно сделать, чтобы оба числа оставались целыми?

6. Петя и Вася выписывают пятизначные числа, не содержащие нулей, причем Петя выписывает только те числа, которые дают остатки 0, 2 и 4 от деления на 9, а Вася те, которые дают остатки 1, 3 и 5 от деления на 9. Кто из мальчиков выпишет больше чисел?

Третий тур. Лига B.

1. В центре «Интеллект» проводится олимпиада по математике. В здании имеется 9 аудиторий размера 9 м $\times$ 9 м. В связи с антиковидными ограничениями, во время решения задач, участники в одной аудитории должны находиться не менее, чем на 4.3 м друг от друга. Какое максимальное количество человек может писать эту олимпиаду? (Участников можно воспринимать как материальную точку.)

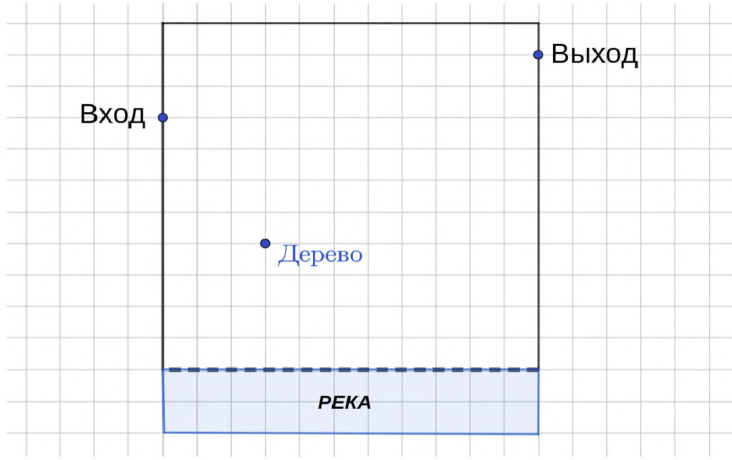
2. На полке стоит $N > 100$ кружек. Денис за ход дополнительно ставит на полку от 1 до 3 кружек. Таня же за ход может убрать любое количество кружек, кратное 3, 5 или 7. Денис и Таня ходят по очереди, причем начинает Денис. Докажите, что Тане потребуется не более 2 ходов, чтобы оставить полку пустой вне зависимости от ходов Дениса.

3. $ABCD$ – прямоугольник. Отношение сторон $AB : BC = 1 : 7$. На BC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает диагонали прямоугольника AC и BD в точках P и Q соответственно. Найдите площадь четырехугольника $PBCQ$, если $BC = 14$.

4. На планете УноГолова проживают инопланетяне 2 типов:
   · с 1 головой, 2 руками и 3 ногами
   · с 1 головой, 3 руками и 2 ногами
   Выяснилось, что всего на этой планете 57 голов, общее число рук делится на 4, общее количество ног делится на 5. Сколько всего ног могло быть на этой планете? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

5. На доске написано два различных натуральных числа, не превосходящих 2022. Можно заменить одно из чисел на их среднее арифметическое. Какое наибольшее таких замен можно сделать, чтобы оба числа оставались целыми?

6. Тётя Маша планирует прогулку по парку с обязательным посещением двух мест: Дерева и берега реки (обозначен пунктиром на картинке). Начать она должна в точке «ВХОД» и закончить в точке «ВЫХОД», а также посетить Дерево и Берег реки в любом порядке. Найдите минимальную длину маршрута.


Выход
Вход
Дерево
РЕКА

Третий тур. Лига C.

1. В центре «Интеллект» проводится олимпиада по математике. В здании имеется 9 аудиторий размера 9 м $\times$ 9 м. В связи с антиковидными ограничениями, во время решения задач, участники в одной аудитории должны находиться не менее, чем на 4.3 м друг от друга. Какое максимальное количество человек может писать эту олимпиаду? (Участников можно воспринимать как материальную точку.)

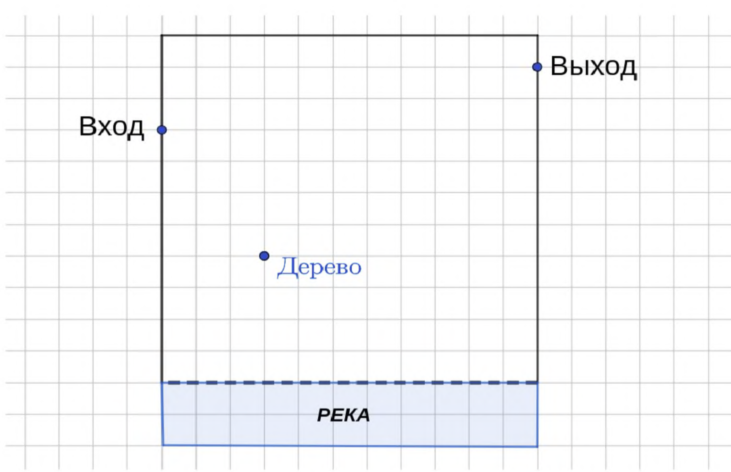
2. На полке стоит $N > 100$ кружек. Денис за ход дополнительно ставит на полку от 1 до 3 кружек. Таня же за ход может убрать любое количество кружек, кратное 3, 5 или 7. Денис и Таня ходят по очереди, причем начинает Денис. Докажите, что Тане потребуется не более 2 ходов, чтобы оставить полку пустой вне зависимости от ходов Дениса.

3. $ABCD$ — прямоугольник. Отношение сторон $AB : BC = 1 : 7$. На BC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает диагонали прямоугольника AC и BD в точках P и Q соответственно. Найдите площадь четырехугольника $PBCQ$, если $BC = 14$.

4. На планете УноГолова проживают инопланетяне 2 типов:
   · с 1 головой, 2 руками и 3 ногами
   · с 1 головой, 3 руками и 2 ногами
   Выяснилось, что всего на этой планете 57 голов, общее число рук делится на 4, общее количество ног делится на 5. Сколько всего ног могло быть на этой планете? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

5. Про положительные числа x, y, z известно, что $x \leq y \leq z$ и $x + y + z \leq 1$. Докажите, что $5x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1$.

6. Тётя Маша планирует прогулку по парку с обязательным посещением двух мест: Дерева и берега реки (обозначен пунктиром на картинке). Начать она должна в точке «ВХОД» и закончить в точке «ВЫХОД», а также посетить Дерево и Берег реки в любом порядке. Найдите минимальную длину маршрута.

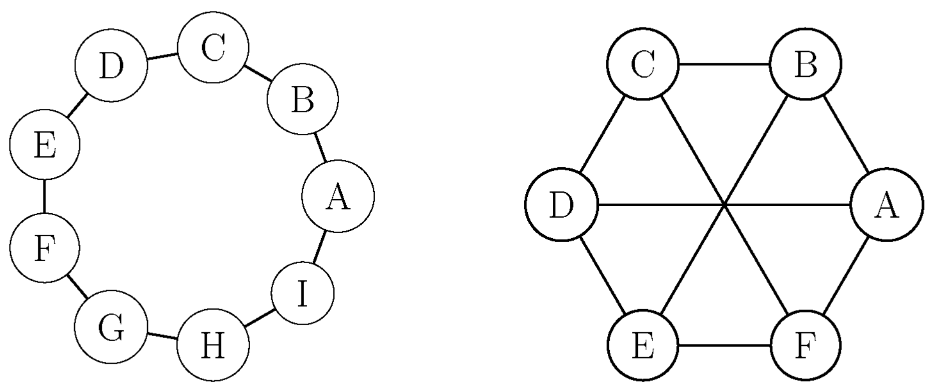


«Шаг в математику» — решения

Первый тур. Лига А.

1. На чемпионате по футболу в некоторый момент было сыграно 9 матчей. Известно, что все команды сыграли одинаковое количество матчей, при этом любые две команды играли друг с другом не более одного раза. Одна из команд набрала 4 очка (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко). Сколько команд участвовало в чемпионате? *(А. Лукъянов)*

   Ответ: 6 или 9.
   Решение: Пусть каждая команда сыграла m матчей. Если команд было n, то, используя идею двойного подсчёта, можно установить, что матчей было $\frac{nm}{2}$, что по условию равно 9. Значит $nm = 18$. Ясно, что $n > m$, иначе по принципу Дирихле, какие-то 2 команды сыграли бы между собой дважды. Рассмотрим все 3 случая: $(n = 18, m = 1)$, $(n = 9, m = 2)$, $(n = 6, m = 3)$. Ясно, что случай $(n = 18, m = 1)$ не подходит, так как за 1 матч невозможно набрать 4 очка. Покажем, как могли получиться случаи $(n = 9, m = 2)$ и $(n = 6, m = 3)$:

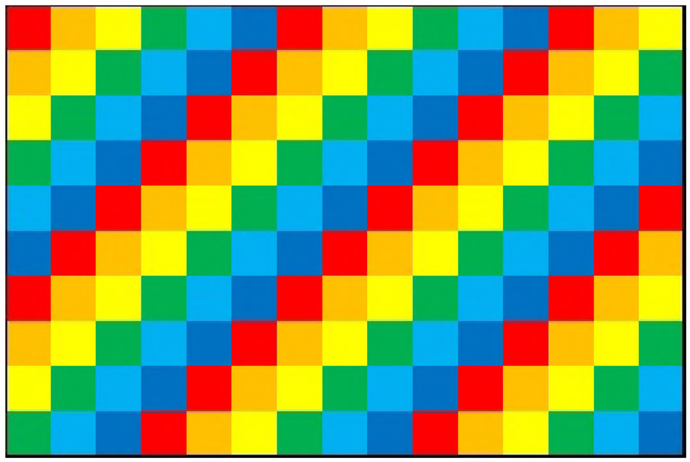
   

   Пусть команда, которая набрала 4 очка — это команда A. Тогда в случае с 9 командами пусть она выиграла у B и сыграла вничью с I, а в случае с 6 командами — выиграла у B, сыграла вничью с D, и проиграла команде F.
   Комментарий: Заметьте, что нельзя начинать решения со слов: «Пусть команды сыграли n туров», так как никто не говорил, что команды играли по турам. Более того, если команд нечётное количество, то ни о каких турах не может идти речи.
   Также решения без примеров являются неполными. Не утверждалось, что каждая отдельно взятая ситуации в принципе возможна.

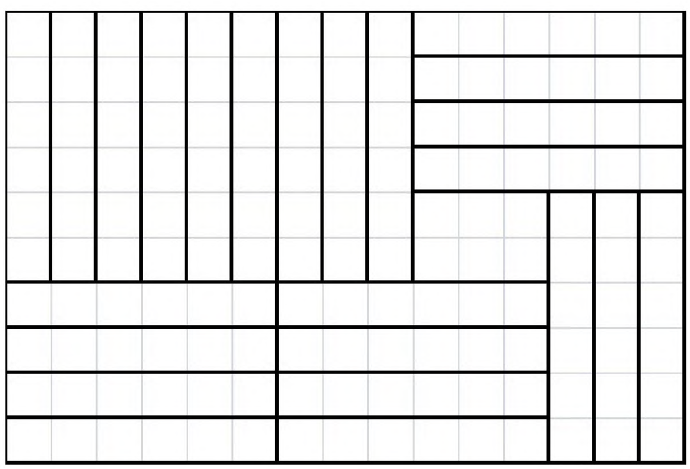
2. Доску размера 10×15 распилили на прямоугольники, каждый из которых имеет размер 1×6 или 2×3. Какое наибольшее количество прямоугольников первого типа могло получиться? *(П. Цишевич)*

Ответ: 24.

Решение: Так как площадь доски равна 150, в площадь каждого прямоугольника — 6, то в результате оказалось 25 прямоугольников. Докажем, что не может быть такого, что все они размера 1×6. Используем диагональную раскраску в шесть цветов. Заметим, что тогда каждый прямоугольник 1×6 содержит в себе по одной клетке каждого цвета. Значит, если бы доску удалось распилить на такие прямоугольники, то всех цветов оказалось бы поровну (по 25), но не сложно посчитать, что красных клеток, например, 24, а желтых — 26.



Пример, когда прямоугольников первого типа ровно 24 можно привести.



Комментарий: Можно иначе объяснить, что 25 прямоугольников первого типа не может быть. Используем раскраску «матрас», то есть покрасим столбцы, чередуя черный и белый цвет. Заметим, что любой прямоугольник 1×6 либо содержит по 3 клетки каждого цвета (если он расположен горизонтально), либо 6 клеток какого-то одного цвета (если он расположен вертикально). Получается, что в любом таком прямоугольнике разность черных и белых клеток кратна шести. Значит, если бы нам удалось распилить всю доску на такие прямоугольники, то разность черных и белых клеток на всей доске оказалась бы кратна шести. Но эта разность равна 10. Противоречие.

3. Найдите наибольшее число, у которого каждая некрайняя цифра равна разности своего правого и левого соседа.

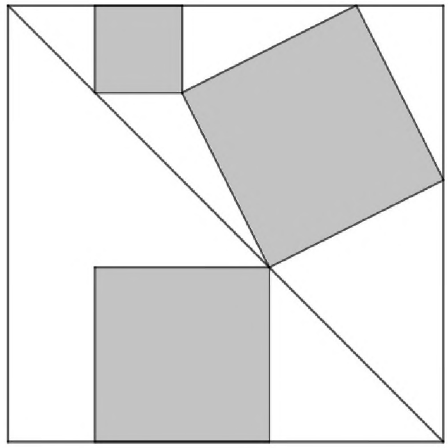
Ответ: 10112358.
Решение: Заметим, что если на третьей позиции слева стоит цифра ≥ 2, то на следующей позиции тоже стоит цифра ≥ 2, а значит на пятой позиции стоит цифра ≥ 4, на шестой — ≥ 6, а значит, число окажется не больше чем шестизначным. Ноль на третьей позиции стоять не может, а единица там может стоять только в случае, если первые две цифры — это 1 и 0 соответственно. Проверим этот случай. Получим 10112358. Получилось восьмизначное число, которое, естественно, больше любого шестизначного.

4. В группу детского сада ходит 11 детей, причем у всех них разные имена. Как-то раз дети решили поиграть в догонялки, а воспитательница тетя Маша решила записывать в столбик имена водящих. Когда игра закончилась, тетя Маша заметила, что в ее списке 7 строк с именами (не обязательно различными), причем первым и последним водящим был Артём. Сколько различных списков могло получиться у тети Маши при указанных условиях? *(П. Цишевич)*

Ответ: 90910.
Решение: Обозначим A_n количество списков длины n, в которых Артем был первым и последним водящим. Докажем, что $A_n = 10^{n-2} - A_{n-1}$, при $n \geq 4$. Действительно, в списке длины n, в которых Артем был первым и последним водящим есть еще $n-2$ позиции. На каждой из них может быть записано 10 детей (11 детей всего – прошлый водящий.) Значит, у нас есть 10^{n-2} способов заполнить список. Однако, мы никак не учли, что предпоследним водящим Артем быть не мог (иначе бы он не стал последним водящим). Поэтому нужно вычесть все эти случаи. Их ровно A_{n-1}. Значит, мы доказали, что $A_n = 10^{n-2} - A_{n-1}$.
Тогда, $A_7 = 10^5 - A_6 = 10^5 - (10^4 - A_5) = 10^5 - 10^4 + 10^3 - A_4 = 10^5 - 10^4 + 10^3 - 10^2 + A_3 = 90900 + A_3$.
Ясно, что списков длины 3, в которых Артем был первым и последним водящим всего 10. Значит, $A_3 = 10$, а $A_7 = 90900 + A_3 = 90910$.
Комментарий: Считать можно и иначе. Например, перебрать случаи, водил ли Артем еще, и если водил, то каким по счету. Он мог больше не водить, таких случаев $10 \cdot 9^4$. Мог водить только третьим, только четвертым или только пятым (по $10^2 \cdot 9^2$ случая). А также мог водить третьим и пятым, таких случаев 10^3. Всего получается $10 \cdot 9^4 + 3 \cdot 10^2 \cdot 9^2 + 10^3 = 65610 + 24300 + 1000 = 90910$.

5. Дано четыре различных натуральных числа. Докажите, что их удвоенное произведение больше, чем сумма всех попарных произведений этих чисел.
Решение: Пусть $a < b < c < d$. Тогда $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$, $d \geq 4$. Поэтому $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} < 2$.
Домножив полученное неравенство на $abcd$, получим требуемое.

6. Найдите, какую часть площади большого квадрата составляет сумма площадей трех серых квадратов.



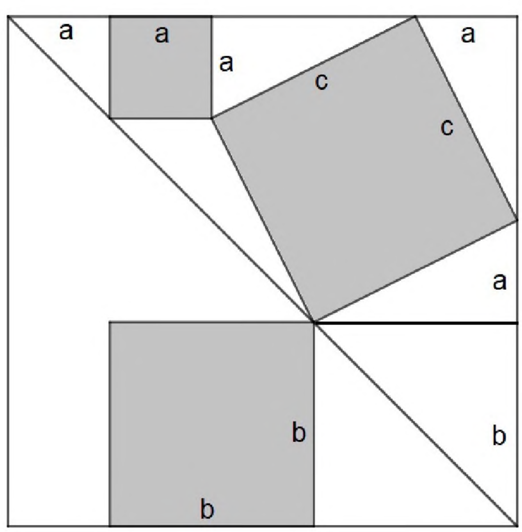
Ответ: 0.4.

Решение: Обозначим за a, b и c длины сторон серых квадратов. Ясно, что слева от квадрата со стороной a по верхней стороне исходного квадрата, будет отложен отрезок размера a (прямоугольный треугольник с углом $45°$). Аналогично понимаем, что справа от квадрата со стороной b лежит такой же квадрат со стороной b.

Наконец, заметим, что три белых прямоугольных треугольника вокруг квадрата со стороной c равны друг другу (по гипотенузе и углам). Значит, они имеют гипотенузу c, катет a и еще один катет b. То есть $c^2 = a^2 + b^2$.

Посчитаем сторону исходного квадрата двумя способами: с одной стороны, она равна $a+a+b+a$, если считать по верхней стороне. С другой стороны, она равна $b + a + b$. Значит, $b = 2a$, тогда сторона исходного квадрата равняется $5a$, а его площадь — $25a^2$.

Площадь же закрашенных квадратов равна $a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2) = 2\cdot 5a^2 = 10a^2$, что составляет $\frac{2}{5} = 0.4$ от площади всего квадрата.



Первый тур. Лига B.

1. На чемпионате по футболу в некоторый момент было сыграно 9 матчей. Известно, что все команды сыграли одинаковое количество матчей, при этом любые две команды играли друг с другом не более одного раза. Одна из команд набрала 4 очка (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко). Сколько команд участвовало в чемпионате? *(А. Лукьянов)*
   См. решение задачи 1 в Лиге А.

2. Доску размера 10×15 распилили на прямоугольники, каждый из которых имеет размер 1×6 или 2×3. Какое наибольшее количество прямоугольников первого типа могло получиться? *(П. Цишевич)*
   См. решение задачи 2 в Лиге А.

3. Найдите наибольшее число, у которого каждая некрайняя цифра равна разности своего правого и левого соседа.
   См. решение задачи 3 в Лиге А.

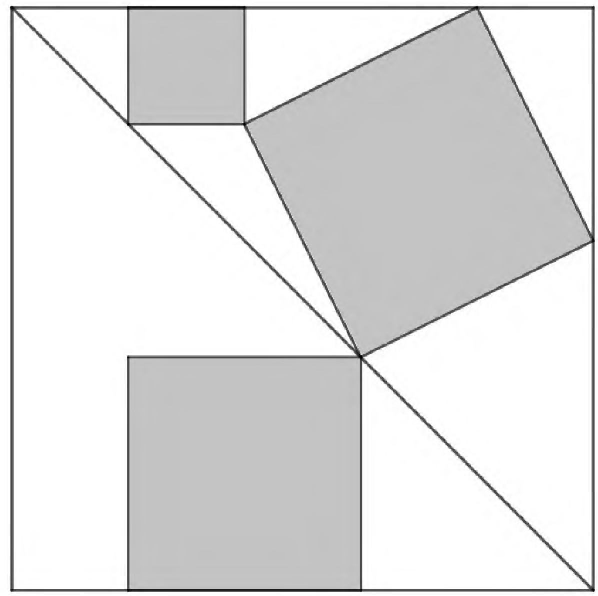
4. В группу детского сада ходит 11 детей, причем у всех них разные имена. Как-то раз дети решили поиграть в догонялки, а воспитательница тетя Маша решила записывать в столбик имена водящих. Когда игра закончилась, тетя Маша заметила, что в ее списке 7 строк с именами (не обязательно различными), причем первым и последним водящим был Артём. Сколько различных списков могло получиться у тети Маши при указанных условиях? *(П. Цишевич)*
   См. решение задачи 4 в Лиге А.

5. Решите уравнение в целых числах $y^{n+1} = x^2 + x$, где n — натуральное число.

   Ответ: $(0, 0)$ и $(-1, 0)$.
   Решение: $y^{n+1} = x(x + 1)$. Если в разложение y на простые множители входит p^k, то y^{n+1} делится на $p^{(n+1)k}$; значит (поскольку x и $x+1$ взаимно просты), ровно одно из чисел x, $x + 1$ делится на $p^{(n+1)k}$.

   Следовательно, $|x|$ и $|x + 1|$ являются $(n + 1)$-ми степенями. Но при показателе степени, большем чем 1 ($n + 1 \geq 2$), это возможно, лишь когда одно из чисел равно нулю, а второе — единице. В любом случае $y = 0$.

6. Найдите, какую часть площади большого квадрата составляет сумма площадей трех серых квадратов.



См. решение задачи 6 в Лиге А.

Первый тур. Лига С.

1. На чемпионате по футболу в некоторый момент было сыграно 9 матчей. Известно, что все команды сыграли одинаковое количество матчей, при этом любые две команды играли друг с другом не более одного раза. Одна из команд набрала 4 очка (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко). Сколько команд участвовало в чемпионате? (*А. Лукьянов*)
См. решение задачи 1 в Лиге А.

2. Доску размера 10×15 распилили на прямоугольники, каждый из которых имеет размер 1×6 или 2×3. Какое наибольшее количество прямоугольников первого типа могло получиться? (*П. Цишевич*)
См. решение задачи 2 в Лиге А.

3. Найдите наибольшее число, у которого каждая некрайняя цифра равна разности своего правого и левого соседа.
См. решение задачи 3 в Лиге А.

4. Вася одновременно получил N задач с номерами от 1 до N. Каждая задача имеет свой крайний срок сдачи: k-ую задачу необходимо сдать не позднее, чем через $\frac{k}{2} + 47$ минут после начала. Вася знает, что на выполнение k-ой задачи у него уйдёт ровно k минут. При каком максимальном N Вася успеет сдать все задачи, если одновременно он может решать не более одной задачи? (*А. Лукьянов*)

Ответ: 9.
Решение: Заметим, что до «дедлайна» N-ой задачи должны быть сданы все N задач, так как «дедлайны» задач с меньшим номером наступили раньше. Это означает, что к моменту времени $\frac{N}{2} + 47$ были выполнены все задачи с номерами от 1 до N, а на них было затрачено время

$$1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Следовательно,

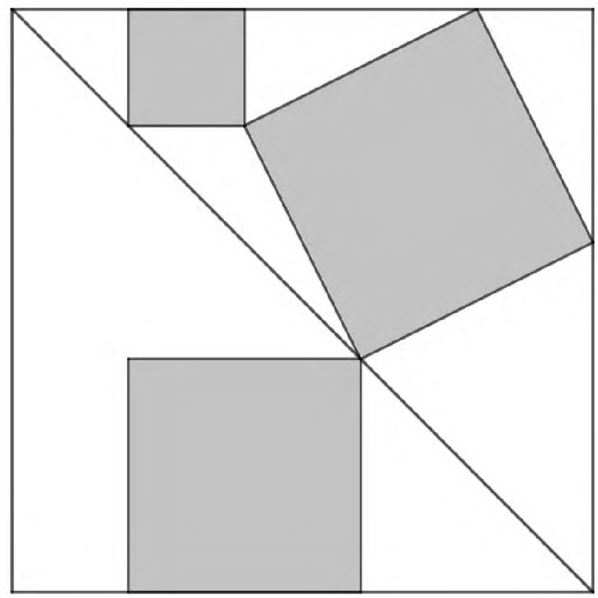
$$\frac{N(N+1)}{2} \leqslant \frac{N}{2} + 47$$

$$N^2 \leqslant 94$$

Так как N — целое неотрицательное, то $0 \leqslant N \leqslant 9$.
Пример для $N = 9$ строится следующим образом: будем решать задачу одну за одной в порядке увеличения их «дедлайна».

5. Решите уравнение в целых числах $y^{n+1} = x^2 + x$, где n — натуральное число.
См. решение задачи 5 в Лиге В.

6. Найдите, какую часть площади большого квадрата составляет сумма площадей трех серых квадратов.



См. решение задачи 6 в Лиге А.

Второй тур. Лига А.

1. У Дениса есть 5 кружек: черно-красно-желтая, красно-белая, красная, синяя и зеленая. Он хочет расставить их на полке в ряд таким образом, чтобы соседние кружки не имели общего цвета. Каким количеством способов он может это сделать? *(П. Цишевич)*

   Ответ: 12.
   Решение: Заметим, что три из пяти кружек имеют красный цвет, поэтому они не могут стоять рядом. Следовательно, они занимают первую, третью и пятую позицию. Всего существует $3! = 6$ способов расставить эти кружки по трем местам. Заметим, что оставшиеся две кружки (синяя и зеленая) могут стоять рядом с любой кружкой. Значит, нужно расставить эти две кружки по двум оставшимся позициям. Это можно сделать 2 способами. Общее число способов расставить все пять кружек равно $6 \cdot 2 = 12$.

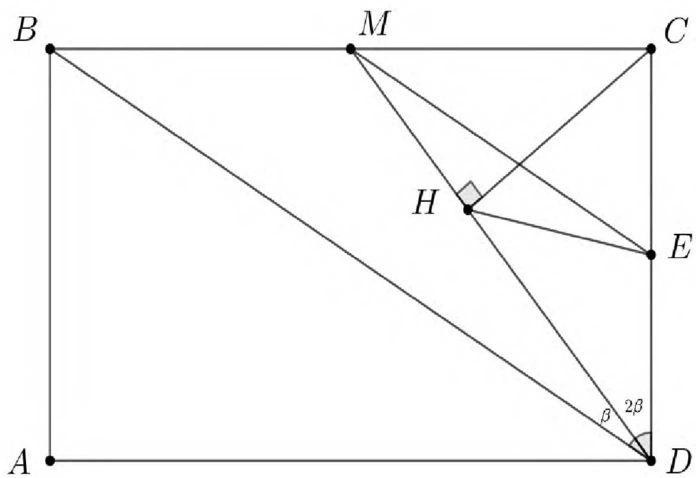
2. На чемпионате по нардам каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих не бывает. По результатам турнира каждый участник получил $A^2 - B^2$ очков, где A — количество побед этого участника, B — количество поражений (могло получиться отрицательное число очков). Сложив очки первой тройки лидеров, получили число 1440. Сколько суммарно очков набрали остальные игроки? *(А. Лукьянов)*

   Ответ: -1440.
   Решение: Докажем, что все участники суммарно получили 0 очков. Пусть всего было n участников. Обозначим за A_i количество побед, а за B_i количество поражений участника i. Если сложить количество побед и количество поражений одного участника, то получится количество игр этого участника, то есть $n-1$ (он сыграл со всеми, кроме себя), то есть $A_i + B_i = n - 1$ для любого i. Значит, $A_i^2 - B_i^2 = (A_i - B_i)(A_i + B_i) = (A_i - B_i)(n-1)$. Тогда, сложив очки всех участников, мы получим $(A_1 - B_1)(n-1) + (A_2 - B_2)(n-1) + \ldots +$
   $+ (A_n - B_n)(n-1) = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n - B_1 - B_2 - \ldots - B_n)(n-1)$.
   Так как каждой победе в турнире соответствует ровно одно поражение и наоборот, то количество все побед равняется количеству все поражений. Значит, $A_1 + A_2 + \ldots + A_n - B_1 - B_2 - \ldots - B_n = 0$. Следовательно, сумма очков всех участников равна 0. А тогда, сумма участников, не находящихся в первой тройке, вычисляется как $0 - 1440 = -1440$.

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$. Точка M является серединой стороны BC, при этом градусная мера $\angle CDM$ в 2 раза больше градусной меры $\angle BDM$. В треугольнике MCD из $\angle C$ проведена высота CH. Найдите длину MH.

   Ответ: 5.

Решение: Обозначим середину стороны CD точкой E. Тогда отрезок HE является медианой в прямоугольном треугольнике DCM, проведенной из прямого угла, а значит, $HE = \frac{CD}{2} = 5$. Тогда $\angle DHE = \angle HDE = 2\beta$, а $\angle HED =$
$= 180^\circ - 4\beta$. Также заметим, что ME — средняя линия в треугольнике BCD, то есть $ME \| BD$. Тогда $\angle DME = \angle MDB = \beta$ как накрест лежащие, а $\angle MEC = \angle BDC = 3\beta$ как соответственные.
Теперь можно найти угол MEH. Он равен $180^\circ - \angle EMC - \angle HED = 180^\circ -$
$- (180^\circ - 4\beta) - 3\beta = \beta$. Таким образом $\angle DME = \angle MEH$, то есть треугольник MEH равнобедренный. Получается, что $MH = HE = 5$.

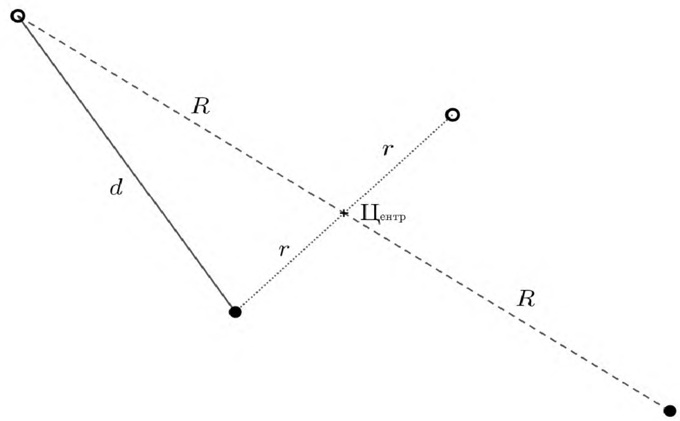


4. Двое играют в следующую игру: на центральном узле клетчатого квадрата 10×10 стоит фишка. За один ход можно переносить фишку на любой другой узел квадрата, в том числе на границе, но так, чтобы длина хода (то есть расстояние, на которое передвинули фишку) была больше, чем длина предыдущего хода, сделанного соперником. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Второй игрок.
Решение: Выигрывает второй игрок. Для этого нужно ставить фишку из узла, в который её только что поставил первый игрок, в точку, симметричную относительно центра доски. Докажем, что длина такого хода будет точно больше: очевидно, что длина первого хода второго игрока будет в 2 раза больше длины первого хода первого игрока.
Теперь рассмотрим любой не первый ход первого игрока. Пусть перед его ходом фишка стояла на расстоянии r от центра (это также говорит о том, что второй игрок перед этим сделал ход длиной $2r$). Пусть первый игрок сделал ход длины d (по условию $d > 2r$). Теперь второй игрок по нашей стратегии должен сделать ход длины $2R$, где R — расстояние от фишки до центра после хода первого игрока. Докажем, что этот ход будет корректен, то есть, что $2R > d$. По неравенству

треугольника $R+r>d$, а $d>2r$, как замечалось ранее. Поэтому $R+r>2r$, что означает, что $R>r$, а значит, что

$$2R = R + R > R + r > d.$$



Таким образом, если второй игрок будет играть по предложенному алгоритму, то у него всегда будет корректный ответный ход на любой ход первого игрока. Значит, ход второго игрока не мог быть последним.
Также заметим, что после каждого хода второго игрока расстояние от цента квадрата до узла, в который попадает фишка, увеличивается. Так как узлов конечное число, то игра рано или поздно закончится. А значит, первый проиграет.

□

5. Имеется 59 единиц. Вася «склеивает» эти единицы в числа (например, в 1, 111, 11111111 и т.п.). Какое максимальное количество различных попарно взаимно простых чисел он может получить таким образом? (Не обязательно использовать все единицы.) *(А. Лукьянов)*

Ответ: 8.
Решение: Докажем, что числа состоящие из n и k единиц взаимно просты тогда и только тогда, когда взаимно просты числа n и k.
Для начала заметим, что при $a>b$

$$\text{НОД}(\underbrace{111\ldots111}_{a\text{ единиц}},\underbrace{111\ldots111}_{b\text{ единиц}}) = \text{НОД}(\underbrace{11\ldots11}_{a-b\text{ единиц}}\underbrace{00\ldots00}_{b\text{ нулей}},\underbrace{111\ldots111}_{b\text{ единиц}}) =$$

$$= \text{НОД}(\underbrace{11\ldots11}_{a-b\text{ единиц}}\cdot 10^b,\underbrace{111\ldots111}_{b\text{ единиц}}) = \text{НОД}(\underbrace{11\ldots11}_{a-b\text{ единиц}},\underbrace{111\ldots111}_{b\text{ единиц}}).$$

Последний переход верен, так как число, состоящее лишь из единиц взаимно просто с 10^b.

То есть количество единиц в числах меняется так же, как и сами числа a и b, если к ним применить алгоритм Евклида. То есть

$$\text{НОД}(\underbrace{111\ldots111}_{a\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots111}_{b\text{ единиц}}) = \underbrace{111\ldots111}_{\text{НОД}(a,b)\text{ единиц}}.$$

Стало быть,

$$\text{НОД}(\underbrace{111\ldots111}_{n\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots111}_{k\text{ единиц}}) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(n,k) = 1.$$

Итак, пусть Вася собрал максимальное количество взаимно простых чисел, «скленных» из имеющихся у него 59 единиц. Докажем, что можно собрать набор с таким же количеством чисел, не «склеивая» составное число единиц в одно число (то есть набор не будет содержать чисел с составным числом единиц).

Пусть в наборе Васи имеется число с составным числом единиц. Обозначим количество единиц в этом числе за m. Поскольку m — составное число, то у m имеется какой-то простой делитель p. Тогда заменим число из m единиц на число из p единиц. При такой замене количество использованных единиц уменьшилось, а условие попарной взаимной простоты не нарушилось.

Начнём составлять максимальный набор из чисел, длины которых не являются составными (то есть 1 и все простые). Опять же заметим, что мы можем брать все доступные нам длины в порядке их возрастания, иначе, если имеется максимальный набор чисел, длины которых $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ при этом существует не составное число b, такое что $b < a_n$ и b не присутствует среди a_i, то заменим a_n на b, условие взаимной простоты не нарушится, а количество единиц уменьшится. Итак склеиваем единицы в числа следующих длин:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 59$$

то есть получится 8 чисел.

Комментарий: В ходе турнира команда Волховского района предложила следующее решение задачи:

Сначала заметим, что два числа, состоящие из четного числа единиц, не являются взаимно простыми, так как оба, как минимум делятся на 11. Значит, среди чисел Васи максимум одно число состоит из четного числа единиц.

Про взаимную простоту других чисел мы на время забудем. Попробуем составить как можно больше чисел, используя 59 единиц. Для этого будем составлять числа, содержащие как можно меньше единиц. Это будут числа содержащие 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11 и 13 единиц. Для составления этих чисел потребуется 51 единица, поэтому для следующего числа, в котором должно быть хотя бы 15 единиц, оставшихся единиц не хватит. Таким образом, даже отказавшись от взаимной простоты некоторых чисел, мы не можем получить больше 8 чисел.

Пример на 8 чисел описан в авторском решении.

6. Сидя за столиком в кафе, Петя и Вася насчитали 111 «ног» в кафе. Известно, что все столики имеют по три ножки, стулья — по четыре, люди — по две. Вася приметил, что за каждым столиком находится от 2 до 5 стульев. Петя обратил внимание, что людей в зале нечетное количество и все они сидят на стульях. Какое минимальное количество стульев могло быть в кафе? (*А. Лукьянов*)

Ответ: 15.

Решение: Пусть было x стульев, y столов и z людей. Заметим, что $2y \leq x \leq 5y$ по замечанию Васи. А $z \leq x$ по замечанию Пети, а значит и $z \leq 5y$.

$$111 = 4x + 3y + 2z \leq 4 \cdot 5y + 3y + 2 \cdot 5y = 33y.$$

В силу того, что $y \in \mathbb{N}$, $y \geq 4$.
С другой стороны, так как $x \geq 2y$, получим оценку сверху на количество столов: $111 = 4x + 3y + 2z \geq 11y + 2z$, значит, $y \leq 10$.
Заметим, что y — нечётное число, так как 111 нечётное, а $4x$ и $2z$ — чётные. Значит, $y \in \{5, 7, 9\}$.
Рассмотрим 3 случая:

(a) $y = 5$. Тогда $4x + 2z = 111 - 15 = 96$, $2x + z = 48$. Но тогда z будет четным, что противоречит замечанию Пети.

(b) $y = 9$. Тогда $4x + 2z = 111 - 27 = 84$, $2x + z = 42$. Не подходит по той же причине.

(c) $y = 7$. $2x + z = 45$. Противоречий нет.

Вспомним, что $x \geq z$. Тогда $3x \geq 2x + z = 45 \Rightarrow x \geq 15$.
Для 15 есть пример. $x = 15$, $z = 15$, $y = 7$.
За 6 столами по 2 стула, и еще за одним столом — 3. На каждом стуле сидит человек.
Комментарий: В ходе турнира некоторые команды нашли более простое решение задачи:
Сначала приведем пример, что могло быть 15 стульев (аналогичный пример представлен в авторском решении). Теперь предположим, что стульев было ≤ 14. Тогда и людей было ≤ 14, так как все люди сидят. Столов же было ≤ 7, так как у каждого стола стоит хотя бы два стула. Тогда посчитаем сколько максимально «ног» могло быть в кафе. Их было $\leq 14 \cdot 4 + 14 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 105$. Но по условию «ног» было 111. Противоречие.

Второй тур. Лига B.

1. У Дениса есть 5 кружек: черно-красно-желтая, красно-белая, красная, синяя и зеленая. Он хочет расставить их на полке в ряд таким образом, чтобы соседние кружки не имели общего цвета. Каким количеством способов он может это сделать? (*П. Цишевич*)

   См. решение задачи 1 в Лиге A.

2. На чемпионате по нардам каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих не бывает. По результатам турнира каждый участник получил $A^2 - B^2$ очков, где A — количество побед этого участника, B — количество поражений (могло получиться отрицательное число очков). Сложив очки первой тройки лидеров, получили число 1440. Сколько суммарно очков набрали остальные игроки? (*А. Лукьянов*)

   См. решение задачи 2 в Лиге A.

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$. Точка M является серединой стороны BC, при этом градусная мера $\angle CDM$ в 2 раза больше градусной меры $\angle BDM$. В треугольнике MCD из $\angle C$ проведена высота CH. Найдите длину MH.

   См. решение задачи 3 в Лиге A.

4. Двое играют в следующую игру: на центральном узле клетчатого квадрата 10×10 стоит фишка. За один ход можно переносить фишку на любой другой узел квадрата, в том числе на границе, но так, чтобы длина хода (то есть расстояние, на которое передвинули фишку) была больше, чем длина предыдущего хода, сделанного соперником. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

   См. решение задачи 4 в Лиге A.

5. По кругу стоят 253 занумерованных от 1 до 253 свечек. Вася хочет зажечь некоторые из них так, чтобы не было 23 подряд горящих свечек. При этом Вася хочет зажечь максимально возможное число свечек. Сколькими способами он может это сделать? (*А. Лукьянов*)

   Ответ: 23.

   Решение: Оценим количество зажжённых свечей сверху. Круг из свечей можно разделить на 11 равных частей по 23 свечки в каждом. Очевидно, что ни в какой части не может быть всех зажжённых свечек, значит, в каждой части не более 22 зажжённых свечек. Также есть пример, когда в каждой части зажжено ровно по 22 свечки и условие задачи соблюдено: оставим не зажжённой самую первую свечку в каждой части. Таким образом, мы установим, что максимальное количество свечек, которое Вася может зажечь — $22 \cdot 11 = 242$. Поймем также, что 242 зажжённые свечки могут быть тогда и только тогда, когда в каждой из 11 частей не зажжена ровно одна свечка.

Занумеруем части по порядку и зажжём как угодно 22 свечки в первой части. Докажем, что все остальные части будут в точности такими же, как и первая.
Пусть не зажжённая свечка в первой части была на i-той позиции, значит, во второй и последующих она стоит не позже, чем на i-той, иначе в первой встретившейся части, где не зажжённая свечка стоит позже, чем на i-ой позиции, будет более, чем 22 зажжённые свечки до не зажжённой в предыдущей части, что противоречит условию.
Теперь докажем, что во всех частях не зажжённая свечка стоит не раньше, чем на i-той позиции. Пусть в последней одиннадцатой части не зажжённая свечка стоит раньше, чем на i-той, тогда от неё до не зажжённой свечки в первой части будет больше, чем 22 зажжённых свечки, противоречие. Таким образом, в одиннадцатой части не зажжённая свечка стоит ровно на позиции i (так как позже она стоять не может по ранее доказанному), тогда в десятой части она тоже стоит не раньше, чем на i-ой позиции, но и не позже (по ранее доказанному), значит, в десятой части она стоит ровно на i-той позиции. Аналогичными последовательными рассуждениями понимаем, что в остальных частях не зажжённая свечка тоже стоит ровно на i-той позиции. Очевидно, что условие задачи при этом соблюдается.
Значит, всё зависит лишь от того, какую свечку мы не зажгли в первой части. То есть количество способов достичь желаемого у Васи столько же, сколько способов выбрать 1 свечку из 23, а их ровно 23.

6. Сидя за столиком в кафе, Петя и Вася насчитали 111 «ног» в кафе. Известно, что все столики имеют по три ножки, стулья — по четыре, люди — по две. Вася приметил, что за каждым столиком находится от 2 до 5 стульев. Петя обратил внимание, что людей в зале нечетное количество и все они сидят на стульях. Какое минимальное количество стульев могло быть в кафе? *(А. Лукъянов)*
См. решение задачи 6 в Лиге А.

Второй тур. Лига С.

1. У Дениса есть 5 кружек: черно-красно-желтая, красно-белая, красная, синяя и зеленая. Он хочет расставить их на полке в ряд таким образом, чтобы соседние кружки не имели общего цвета. Каким количеством способов он может это сделать? *(П. Цишевич)*

   См. решение задачи 1 в Лиге А.

2. На чемпионате по нардам каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих не бывает. По результатам турнира каждый участник получил $A^2 - B^2$ очков, где A — количество побед этого участника, B — количество поражений (могло получиться отрицательное число очков). Сложив очки первой тройки лидеров, получили число 1440. Сколько суммарно очков набрали остальные игроки? *(А. Лукьянов)*

   См. решение задачи 2 в Лиге А.

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$. Точка M является серединой стороны BC, при этом градусная мера $\angle CDM$ в 2 раза больше градусной меры $\angle BDM$. В треугольнике MCD из $\angle C$ проведена высота CH. Найдите длину MH.

   См. решение задачи 3 в Лиге А.

4. Про положительные числа n, m, k известно, что $\frac{n}{m+k} = \frac{m}{n+k} = \frac{k}{n+m}$. Докажите, что $\frac{(n+m)^2}{k^2} + \frac{(m+k)^2}{n^2} + \frac{(n+k)^2}{m^2} = 12$.

   Решение: Из условия можем получить, что

$$n^2 + nk = m^2 + mk;$$

$$n^2 - m^2 + nk - mk = 0;$$

$$(n-m)(n+m+k) = 0.$$

   Поскольку n, m, k положительны, $n = m$. Аналогично, $m = k$. Поэтому

$$\frac{(n+m)^2}{k^2} + \frac{(m+k)^2}{n^2} + \frac{(n+k)^2}{m^2} = \frac{(m+m)^2}{m^2} + \frac{(m+m)^2}{m^2} + \frac{(m+m)^2}{m^2} = 12.$$

5. По кругу стоят 253 занумерованных от 1 до 253 свечек. Вася хочет зажечь некоторые из них так, чтобы не было 23 подряд горящих свечек. При этом Вася хочет зажечь максимально возможное число свечек. Сколькими способами он может это сделать? *(А. Лукьянов)*

   См. решение задачи 5 в Лиге В.

6. Сидя за столиком в кафе, Петя и Вася насчитали 111 «ног» в кафе. Известно, что все столики имеют по три ножки, стулья — по четыре, люди — по две. Вася

приметил, что за каждым столиком находится от 2 до 5 стульев. Петя обратил внимание, что людей в зале нечетное количество и все они сидят на стульях. Какое минимальное количество стульев могло быть в кафе? (*А. Лукъянов*)

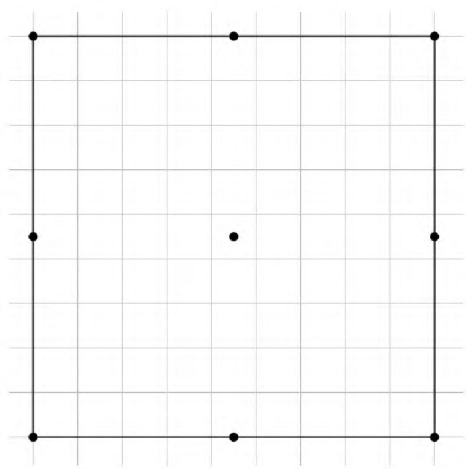
См. решение задачи 6 в Лиге А.

Третий тур. Лига А.

1. В центре «Интеллект» проводится олимпиада по математике. В здании имеется 9 аудиторий размера 9 м $\times$ 9 м. В связи с антиковидными ограничениями, во время решения задач, участники в одной аудитории должны находиться не менее, чем на 4.3 м друг от друга. Какое максимальное количество человек может писать эту олимпиаду? (Участников можно воспринимать как материальную точку.)

   (*А. Лукъянов*)

   Ответ: 81.
   Решение: Для начала оценим сверху возможное количество людей, находящихся в одной аудитории. Разделим аудиторию на 3 квадрата 3×3. Внутри одного квадрата не может находиться более 1 ученика, так как максимальное расстояние в квадрате — $3\sqrt{2}$ (диагональ), а $3\sqrt{2} < 4.3$ (проверяется возведением в квадрат обеих частей — $18 < 18.49$). Значит, у нас не может быль более 9 учеников в одной аудитории.
   Приведём пример для 9 учеников:



   Так как в центре «Интеллект» 9 аудиторий и в каждой максимально можно посадить по 9 человек, тогда максимальное количество участников — $9 \cdot 9 = 81$.
   Комментарий: Те, кто считает, что «нахождение в аудитории» — это нахождение строго внутри квадрата, может немного сместить точки, например на 0.05 к центру. Заметим, что любое попарное расстояние в этом случае все равно окажется больше, чем 4.3 м.

2. На полке стоит $N > 100$ кружек. Денис за ход дополнительно ставит на полку от 1 до 3 кружек. Таня же за ход может убрать любое количество кружек, кратное 3, 5 или 7. Денис и Таня ходят по очереди, причем начинает Денис. Докажите, что Тане потребуется не более 2 ходов, чтобы оставить полку пустой вне зависимости от ходов Дениса.

   (*А. Лукъянов*)

Решение: Пусть Денис сделал свой ход и после него стало $M > N > 100$ кружек. Таня должна посмотреть на остаток от деления числа M на 3. Если число M делится на 3, то Таня может забрать все кружки сразу своим первым ходом. Если же M дает остаток 1 при делении на 3, то Таня должна забрать $M - 4$ кружки (она может это сделать, так как число 4 тоже дает остаток 1 при делении на 3, а значит $(M - 4) \vdots 3$). Тогда после хода Тани останется 4 кружки, а после второго хода Дениса их станет 5, 6 или 7. Заметим, что эти числа кратны 5, 3 и 7, соответственно, а значит, Таня сможет забрать все кружки своим вторым ходом. Аналогично рассмотрим случай, когда M дает остаток 2 при делении на 3. В этом случае Тане следует забрать $M - 53$ кружки (она снова сможет это сделать, так как в этом случае числа M и 53 дают остаток 2 при делении на 3, а значит их разность делится на 3). Тогда Таня оставляет 53 кружки, а значит после второго хода Дениса их станет 54, 55 или 56. Эти числа кратны 3, 5 и 7, соответственно, а значит, Таня снова сможет забрать все кружки сделав ровно два хода.
Комментарий: В случае, когда остаток равен 1, вместо того, чтобы оставлять 4 кружки, Таня может оставить 97 кружек. А в случае, когда остаток равен 2, 53 кружки можно поменять на 47.

3. $ABCD$ — прямоугольник. Отношение сторон $AB : BC = 1 : 7$. На BC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает диагонали прямоугольника AC и BD в точках P и Q соответственно. Найдите площадь четырехугольника $PBCQ$, если $BC = 14$.

Ответ: $\frac{7^5}{5^4}$.
Решение: Очевидно, что $\angle BPC$ и $\angle CQB$ — прямые, так как, они вписаны в окружности $BPQC$ и опираются на её диаметр BC. Заметим, что ΔBQC и ΔBCD подобны, так как прямоугольные и имеют общий угол. Следовательно

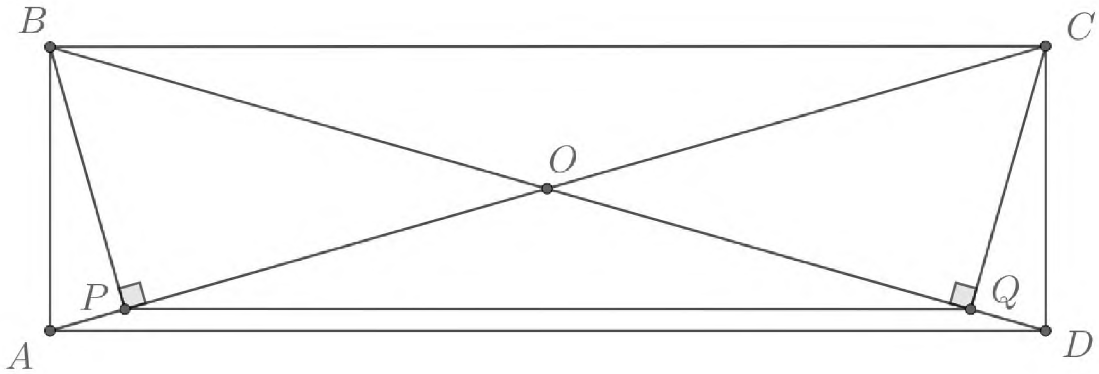
$$\frac{BC}{BQ} = \frac{BD}{BC};$$

$$BD = \sqrt{14^2 + 2^2} = 10\sqrt{2};$$

$$BQ = \frac{49\sqrt{2}}{5}.$$

Аналогично $PC = \frac{49\sqrt{2}}{5}$.
$AO = OC = 5\sqrt{2}$, как половина диагонали. Значит,

$$OQ = OP = BQ - OB = \frac{49\sqrt{2}}{5} - 5\sqrt{2} = \frac{24\sqrt{2}}{5}.$$



Нетрудно заметить, что $\Delta POQ \sim \Delta BOC$. Коэффициент подобия можно высчитать как $\frac{OQ}{BO} = \frac{24}{25}$. Следовательно, $S_{\Delta POQ} = \frac{24^2}{25^2} S_{\Delta BOC}$, а $S_{\Delta BOC} = 7$, значит, $S_{\Delta POQ} = \frac{7 \cdot 24^2}{25^2}$.
Найдём сторону BP: $BP = \sqrt{BO^2 - OP^2} = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{5}$. Аналогично $CQ = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{5}$. Следовательно,

$$S_{\Delta BOP} = S_{\Delta COQ} = \frac{7 \cdot 24}{5^2}.$$

Найдём полную площадь:

$$S_{BCQP} = S_{\Delta BOC} + 2S_{\Delta BOP} + S_{\Delta POQ};$$

$$S_{BCQP} = 7 + 2 \cdot \frac{7 \cdot 24}{25} + 7 \cdot \left(\frac{24}{25}\right)^2 = 7 \cdot \left(\frac{24}{25} + 1\right)^2 = \frac{7^5}{5^4}.$$

4. На планете УноГолова проживают инопланетяне 2 типов:
$\cdot$ с 1 головой, 2 руками и 3 ногами
$\cdot$ с 1 головой, 3 руками и 2 ногами
Выяснилось, что всего на этой планете 57 голов, общее число рук делится на 4, общее количество ног делится на 5. Сколько всего ног могло быть на этой планете? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*А. Лукьянов*)

Ответ: 125, 145 или 165.
Решение: Обозначим количество инопланетян первого типа за x, а инопланетян второго типа за y. Из условия известно, что $x + y = 57$, а $2x + 3y \,\vdots\, 4$. Тогда $2x + 3y = 2(x + y) + y = (114 + y) \,\vdots\, 4 \Rightarrow (28 \cdot 4 + 2 + y) \,\vdots\, 4 \Rightarrow (2 + y) \,\vdots\, 4$. Можно сразу заметить, что y является четным числом.
Еще нам известно, что $3x + 2y \,\vdots\, 5$. Значит, $3x + 2y = 3(x + y) - y = (171 - y) \,\vdots\, 5 \Rightarrow (34 \cdot 5 + 1 - y) \,\vdots\, 5 \Rightarrow (1 - y) \,\vdots\, 5 \Rightarrow (y - 1) \,\vdots\, 5$. Следовательно, y оканчивается либо на 1, либо на 6. Но ранее было получено, что y четный, значит, y оканчивается на 6.
Поскольку $0 \le y \le 57$, то $y \in \{6, 16, 26, 36, 46, 56\}$. Вспомним, что $(2 + y) \,\vdots\, 4$, тогда

останется лишь три варианта: 6, 26, 46.
Если $y = 6$, то $x = 51$. Тогда всего $2x + 3y = 120 \vdots 4$ рук и $3x + 2y = 165 \vdots 5$ ног.
Если $y = 26$, то $x = 31$. Тогда всего $2x + 3y = 140 \vdots 4$ рук и $3x + 2y = 145 \vdots 5$ ног.
Если $y = 46$, то $x = 11$. Тогда всего $2x + 3y = 160 \vdots 4$ рук и $3x + 2y = 125 \vdots 5$ ног.
Значит, все три варианта подходят под условия, то есть ног всего могло быть 125, 145 или 165.
Комментарий: Можно не выполнять проверку для трех полученных вариантов, а вместо этого объяснить, что все переходы в решении были равносильными.

5. На доске написано два различных натуральных числа, не превосходящих 2022. Можно заменить одно из чисел на их среднее арифметическое. Какое наибольшее таких замен можно сделать, чтобы оба числа оставались целыми?

Ответ: 10.
Решение: Докажем, что после каждой такой замены модуль разности между числами уменьшается в 2 раза. Действительно, если пару (a, b) мы заменим на $(a, \frac{a+b}{2})$, то модуль разности будет равен $|a - \frac{a+b}{2}| = |\frac{a-b}{2}| = \frac{|a-b|}{2}$, что ровно в два раза меньше модуля разности a и b.
Заметим, что модуль разности должен оставаться целым числом, иначе хотя бы одно из написанных чисел точно не будет натуральным. Также заметим, что изначальный модуль разности был больше 0 (так как числа различные), и меньше 2022. Тогда мы сможем провести не больше 10 операций, так как среди чисел от 1 до 2021 не существует числа, которое при делении на 2^{11} остаётся целым числом, то есть модуль разности не сможет оставаться целым числом 11 операций подряд.
Приведём пример двух чисел, для которых можно провести 10 таких операций. Это 1 и $1025 = 2^{10} + 1$, всегда будем менять большее число на среднее арифметическое:

$$(1, 2^{10} + 1) \to (1, 2^9 + 1) \to (1, 2^8 + 1) \to \cdots \to (1, 2^2 + 1) \to (1, 2^1 + 1) \to (1, 2)$$

В представленной цепочке ровно 10 замен.

6. Петя и Вася выписывают пятизначные числа, не содержащие нулей, причем Петя выписывает только те числа, которые дают остатки 0, 2 и 4 от деления на 9, а Вася те, которые дают остатки 1, 3 и 5 от деления на 9. Кто из мальчиков выпишет больше чисел? (*П. Цишевич*)

Ответ: Они выпишут одинаковое количество чисел.
Решение: Построим взаимное соответствие между петиными и васиными числами.
Пусть Петя написал число $\overline{abcde}$. Тогда поставим ему в пару число $\overline{a_1b_1c_1d_1e_1}$, где $a_1 = 10 - a$, $b_1 = 10 - b$, $c_1 = 10 - c$, $d_1 = 10 - d$ и $e_1 = 10 - e$. Понятно, что если петино число состояло из цифр от 1 до 9, то и полученное число состоит из цифр

от 1 до 9.
Пусть число $\overline{abcde}$ дает остаток r при делении на 9. Это равносильно тому, что $a+b+c+d+e$ дает остаток r при делении на 9. Тогда рассмотрим, какой остаток дает число $\overline{a_1b_1c_1d_1e_1}$ при делении на 9. Этот остаток совпадает с остатком от деления $a_1+b_1+c_1+d_1+e_1$ на 9. Но $a_1+b_1+c_1+d_1+e_1 = 10-a+10-b+10-c+10-d+10-e = 50-(a+b+c+d+e) = 5\cdot 9+5-(a+b+c+d+e)$ дает такой же остаток, как и число $5-(a+b+c+d+e)$, то есть остаток $5-r$. Поскольку петино число дает остатки 0, 2 или 4 от деления на 9 (то есть $r \in \{0,2,4\}$), то число, которое мы поставили ему в пару, даст остатки 5, 3 или 1. Значит, число, которое мы поставили петиному числу в пару, является васиным числом.
Аналогично можно показать, что любому васиному числу соответствует число Пети. Значит, числа мальчиков бьются на пары, то есть их равное количество.
Комментарий: Можно и просто посчитать сколько чисел написал каждый из мальчиков. Так как остаток от деления на 9 можно сделать таким, как мы хотим за счет только лишь последней цифры, то каждый мальчик напишет $9^4\cdot 3 = 3^9$ числа. Для полного решения нужно объяснить, что для любого фиксированного остатка r, какие бы четыре цифры мальчики не ставили на первые четыре позиции, найдется ровно одна ненулевая цифра, которую нужно поставить на последнюю позицию, чтобы остаток был равен r.

Третий тур. Лига B.

1. В центре «Интеллект» проводится олимпиада по математике. В здании имеется 9 аудиторий размера 9 м $\times$ 9 м. В связи с антиковидными ограничениями, во время решения задач, участники в одной аудитории должны находиться не менее, чем на 4.3 м друг от друга. Какое максимальное количество человек может писать эту олимпиаду? (Участников можно воспринимать как материальную точку.) *(А. Лукъянов)*

   См. решение задачи 1 в Лиге A.

2. На полке стоит $N > 100$ кружек. Денис за ход дополнительно ставит на полку от 1 до 3 кружек. Таня же за ход может убрать любое количество кружек, кратное 3, 5 или 7. Денис и Таня ходят по очереди, причем начинает Денис. Докажите, что Тане потребуется не более 2 ходов, чтобы оставить полку пустой вне зависимости от ходов Дениса. *(А. Лукъянов)*

   См. решение задачи 2 в Лиге A.

3. $ABCD$ — прямоугольник. Отношение сторон $AB : BC = 1 : 7$. На BC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает диагонали прямоугольника AC и BD в точках P и Q соответственно. Найдите площадь четырехугольника $PBCQ$, если $BC = 14$.

   См. решение задачи 3 в Лиге A.

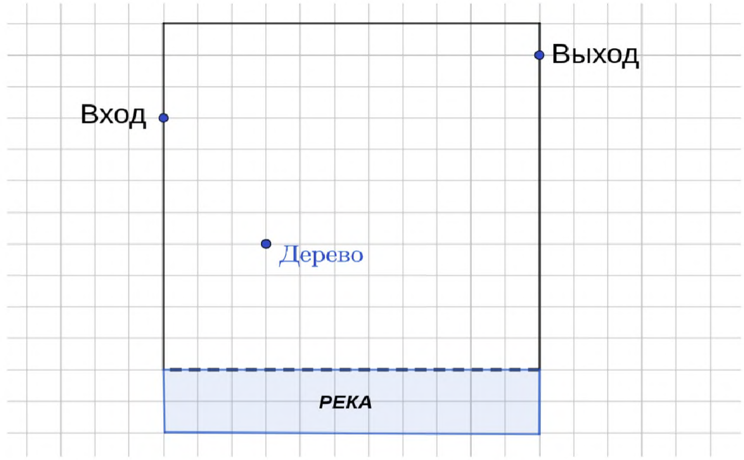
4. На планете УноГолова проживают инопланетяне 2 типов:
   · с 1 головой, 2 руками и 3 ногами
   · с 1 головой, 3 руками и 2 ногами
   Выяснилось, что всего на этой планете 57 голов, общее число рук делится на 4, общее количество ног делится на 5. Сколько всего ног могло быть на этой планете? Найдите все варианты и докажите, что других нет. *(А. Лукъянов)*

   См. решение задачи 4 в Лиге A.

5. На доске написано два различных натуральных числа, не превосходящих 2022. Можно заменить одно из чисел на их среднее арифметическое. Какое наибольшее таких замен можно сделать, чтобы оба числа оставались целыми?

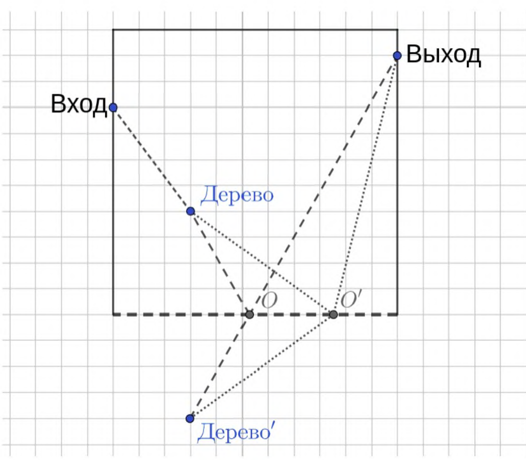
   См. решение задачи 5 в Лиге A.

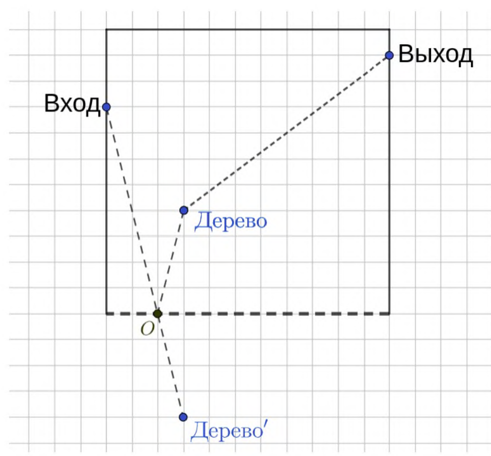
6. Тётя Маша планирует прогулку по парку с обязательным посещением двух мест: Дерева и берега реки (обозначен пунктиром на картинке). Начать она должна в точке «ВХОД» и закончить в точке «ВЫХОД», а также посетить Дерево и Берег реки в любом порядке. Найдите минимальную длину маршрута. *(А. Лукъянов)*



Ответ: $5 + \sqrt{260}$.
Решение: У тёти Маши есть 2 варианта пути:
1. Вход → Дерево → Берег → Выход
2. Вход → Берег → Дерево → Выход

Найдём минимальный путь для тёти Маши, если она посещала все объекты в порядке, как написано в 1 пункте. Тётя Маша должна пройти от входа до дерева. Разумеется, выгоднее всего пройти по отрезку от Входа до Дерева, так как минимальный путь между точками лежит на соединяющих их прямой. Длина этого отрезка равна 5. Теперь найдём минимальный по длине путь от Дерева до Выхода, проходящий через какую-либо точку на береге реки.
Пусть тётя Маша сначала дошла до точки O' (см. левый рисунок), расположенной на берегу реки, а потом пошла к выходу. Найдём такое положение точки O', что длина этого пути будет минимальна.





Отразим Дерево относительно берега в Дерево'. Заметим, что длина отрезка от Дерева' до O' равна длине отрезка от Дерева до O'. Следовательно, длина пути от Выхода до Дерева, проходящего через берег реки равняется длине пути от Выхода до Дерева', проходящего через точку на берегу реки. Очевидно, что минимальный путь от Выхода до Дерева', проходящего через точку на берегу реки — это отрезок от Выхода до Дерева' (он точно проходит через берег). Значит, оптимальное положение точки O' — точка O. Нетрудно вычислить длину отрезка от Выхода до Дерева': $\sqrt{14^2+8^2} = \sqrt{260}$. Соответственно, минимальная длина рассматриваемого варианта пути равна $5+\sqrt{260}$

Абсолютно аналогично доказывается, что минимальная длина второго варианта пути равна $\sqrt{3^2+12^2}+10 = 10+\sqrt{153}$

Осталось выбрать минимальный из двух вариантов путей. Нетрудно понять, что

$$10+\sqrt{153} > 10+\sqrt{144} = 10+12 = 5+17 = 5+\sqrt{289} > 5+\sqrt{260}.$$

Значит, ответ — $5+\sqrt{260}$.

Третий тур. Лига С.

1. В центре «Интеллект» проводится олимпиада по математике. В здании имеется 9 аудиторий размера 9 м $\times$ 9 м. В связи с антиковидными ограничениями, во время решения задач, участники в одной аудитории должны находиться не менее, чем на 4.3 м друг от друга. Какое максимальное количество человек может писать эту олимпиаду? (Участников можно воспринимать как материальную точку.) *(А. Лукъянов)*

   См. решение задачи 1 в Лиге А.

2. На полке стоит $N > 100$ кружек. Денис за ход дополнительно ставит на полку от 1 до 3 кружек. Таня же за ход может убрать любое количество кружек, кратное 3, 5 или 7. Денис и Таня ходят по очереди, причем начинает Денис. Докажите, что Тане потребуется не более 2 ходов, чтобы оставить полку пустой вне зависимости от ходов Дениса. *(А. Лукъянов)*

   См. решение задачи 2 в Лиге А.

3. $ABCD$ — прямоугольник. Отношение сторон $AB : BC = 1 : 7$. На BC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает диагонали прямоугольника AC и BD в точках P и Q соответственно. Найдите площадь четырехугольника $PBCQ$, если $BC = 14$.

   См. решение задачи 3 в Лиге А.

4. На планете УноГолова проживают инопланетяне 2 типов:
   · с 1 головой, 2 руками и 3 ногами
   · с 1 головой, 3 руками и 2 ногами
   Выяснилось, что всего на этой планете 57 голов, общее число рук делится на 4, общее количество ног делится на 5. Сколько всего ног могло быть на этой планете? Найдите все варианты и докажите, что других нет. *(А. Лукъянов)*

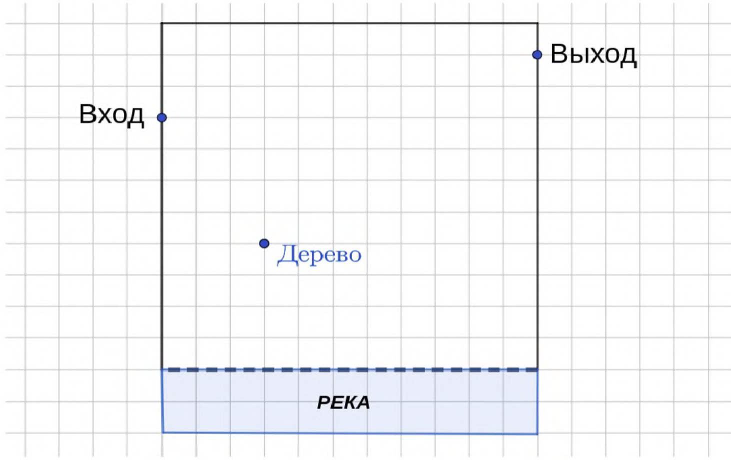
   См. решение задачи 4 в Лиге А.

5. Про положительные числа x, y, z известно, что $x \le y \le z$ и $x + y + z \le 1$. Докажите, что $5x^2 + 3y^2 + z^2 \le 1$.

   Решение: Воспользуемся тем, что $y^2 \le yz$ и $x^2 \le xy \le xz$. Тогда

$$5x^2 + 3y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x^2 + 2x^2 + 2y^2 \le x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz =$$
$$= (x + y + z)^2 \le 1.$$

6. Тётя Маша планирует прогулку по парку с обязательным посещением двух мест: Дерева и берега реки (обозначен пунктиром на картинке). Начать она должна в точке «ВХОД» и закончить в точке «ВЫХОД», а также посетить Дерево и Берег реки в любом порядке. Найдите минимальную длину маршрута. *(А. Лукъянов)*



См. решение задачи 6 в Лиге В.