ГБУ ДО Центр «Интеллект»
Олимпиада по математике, 6 класс
2023 г.

1. В городе Нуар, где проживает Паша, есть бусины всего трех типов: черно-серые, серо-белые и черно-белые (см. рис. 1). Паша купил по две бусины каждого типа, из которых он хочет сделать и подарить Яне ожерелье из 5 бусин. Паша считает, что ожерелье получится «красивым» только при соблюдении двух условий:
   1) центральная бусина будет черно-белой;
   2) соседние бусины должны граничить половинками одинакового цвета.
   Примеры «красивых» ожерелий представлены на рис. 2 и рис. 3.

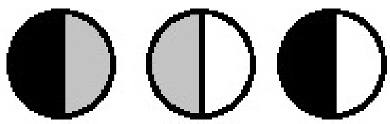


Рис. 1.

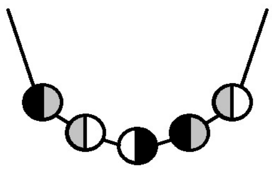


Рис. 2.

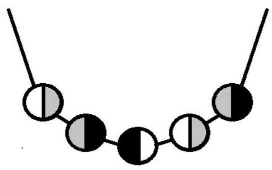


Рис. 3.

Сколько различных «красивых» ожерелий бывает? (Ожерелья, представленные на рис. 2 и рис. 3, считаются различными, несмотря на то, что одно получается из другого поворотом в пространстве.)

2. Саша хочет покрасить *все* кирпичи, из которых сложена пирамидка (см. рис. 4), так, чтобы никакие два соприкасающихся кирпича не были покрашены в один и тот же цвет. Какое минимальное количество различных цветов понадобится Саше?

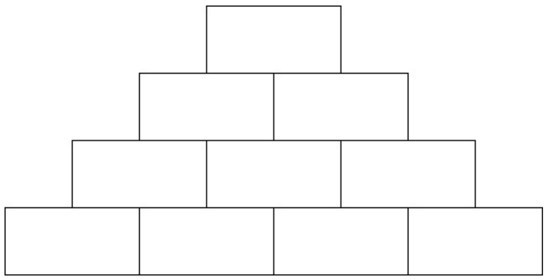


Рис. 4.

3. В одном дворе жили четыре друга: рыцарь, лжец, вредина и повторюша. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда врет. Вредина говорит правду, если высказывание перед ним было ложным, и врет, если перед ним сказали правду. А повторюша, наоборот, говорит правду после правды и врет после лжи. Если вредина говорит первым, то он врет, а если повторюша говорит первым, то он говорит правду.

   Однажды один из друзей заболел, и остальные пошли гулять втроем. Первый сказал: «Второй — вредина, а третий — повторюша». «Нет, — поспорил второй, — это ты — вредина, а третий — повторюша». «Нет же, — возразил третий второму, — первый — вредина, а ты — повторюша!» Определите, кто из мальчиков заболел.

4. На поляне в кругу сидят 4 белочки и 4 кролика через одного. У каждой белочки имеется какое-то количество орешков, а у каждого кролика какое-то количество морковок (количество орешков или морковок у животных может быть различным). Каждая белочка поделилась своими орешками с кроликами–соседями, причем поровну. Каждый кролик также поделился с соседями–белочками морковками поровну. На рис. 5 указано сколько в итоге орешков оказалось у трех кроликов и сколько морковок оказалось у трех белочек. Сколько орешков могло оказаться у четвертого кролика? Сколько морковок могло оказаться у четвертой белочки?

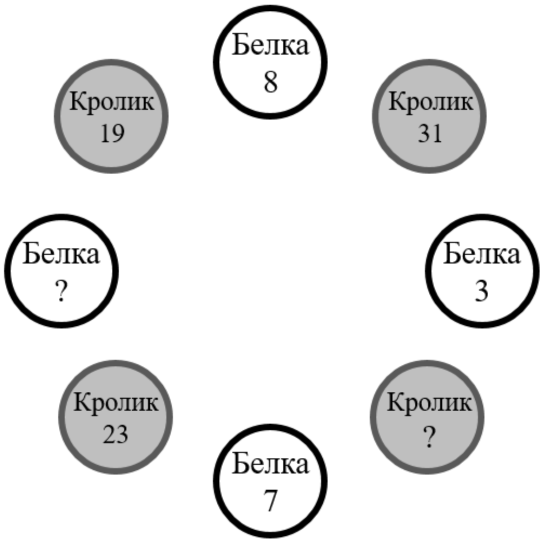


Рис. 5.

5. Три начинающих орнитолога Сорокин, Соколов и Синицин считали птиц в парке четырех видов. Так как орнитологи начинающие, каждый из них правильно различает два вида, а два других может перепутать: один путал ворон и воробьев, другой — воробьев и голубей, третий — голубей и снегирей. Результаты их подсчетов приведены в таблице.

	Вороны	Воробьи	Голуби	Снегири
Сорокин	5	11	5	2
Соколов	5	9	5	4
Синицин	6	8	7	2

Сколько птиц каждого вида было в парке?

6. На забеге встретились 10 участников с номерами от 1 до 10. Участник забега Иванов знаком ровно с 3 другими участниками, при этом у каждого из его знакомых четный номер. Участник забега Петров тоже знаком с 3 участниками, но у всех его знакомых номера нечетные. А участник забега Сидоров знаком ровно с 4 участниками. Докажите, что у Сидорова есть общий знакомый с Петровым или Ивановым.

ГБУ ДО Центр “Интеллект”
Олимпиада по математике, 6 класс
2023 г.
Решения и критерии проверки

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 42.

Общие критерии оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. В городе Нуар, где проживает Паша, есть бусины всего трех типов: черно-серые, серо-белые и черно-белые (см. рис. 1). Паша купил по две бусины каждого типа, из которых он хочет сделать и подарить Яне ожерелье из 5 бусин. Паша считает, что ожерелье получится «красивым» только при соблюдении двух условий:
1) центральная бусина будет черно-белой;
2) соседние бусины должны граничить половинками одинакового цвета.
Примеры «красивых» ожерелий представлены на рис. 2 и рис. 3.

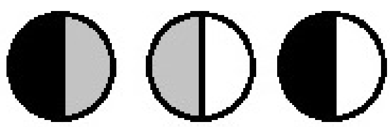


Рис. 1

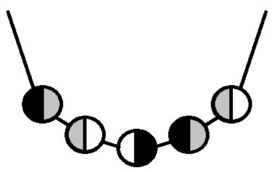


Рис. 2

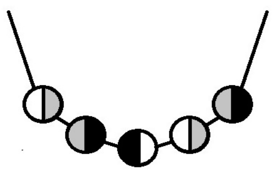
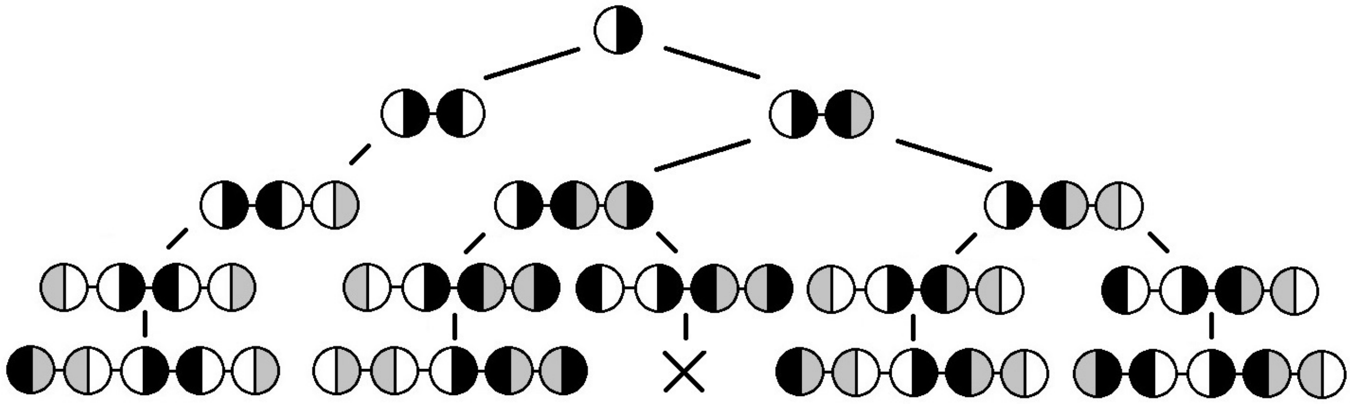


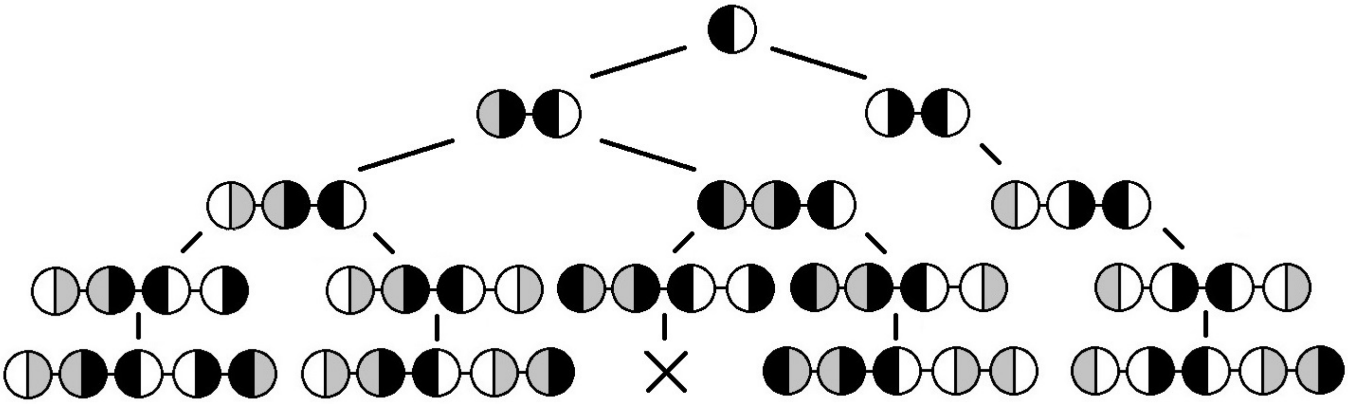
Рис. 3

Сколько различных «красивых» ожерелий бывает? (Ожерелья, представленные на рис. 2 и рис. 3, считаются различными, несмотря на то, что одно получается из другого поворотом в пространстве.) (*П. Цишевич*)

Ответ: 8.

Решение: Будем начинать «делать» ожерелье от центра. Сначала будем нанизывать две бусины справа, а потом — две бусины слева:





Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Перечислены от 3 до 5 ожерельев — 1 балл. Перечислены 6 или 7 ожерельев — 3 балла. Перечислены все ожерелья, но не доказано, что других нет — 5 баллов. Описана структура перебора ожерелий, но перебор осуществлен с ошибками — 4 балла.

2. Саша хочет покрасить *все* кирпичи, из которых сложена пирамидка (см. рис. 4), так, чтобы никакие два соприкасающихся кирпича не были покрашены в один и тот же цвет. Какое минимальное количество различных цветов понадобится Саше? (*А. Лукьянов*)

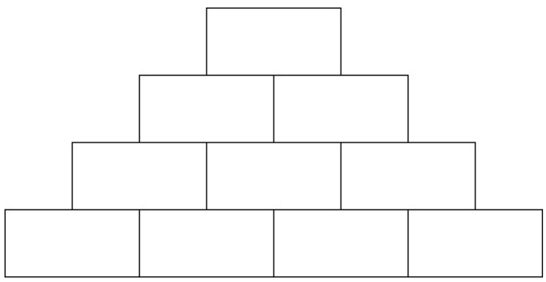
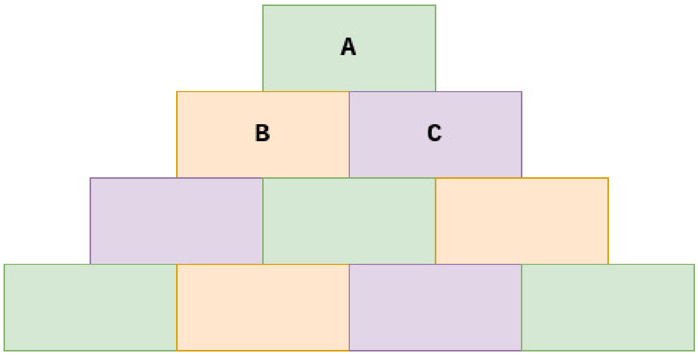


Рис. 4.

Ответ: 3.

Решение. Заметим, что для раскраски трех верхних кирпичей **A**, **B** и **C** понадобится как минимум 3 цвета, так как все они попарно соприкасаются. Значит, и для раскраски всей пирамиды понадобится как минимум 3 цвета. Докажем, что трех цветов достаточно, приведя пример раскраски в 3 цвета:



Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Верная оценка без примера — 4 балла. Только пример раскраски в 3 цвета — 3 балла.

3. В одном дворе жили четыре друга: рыцарь, лжец, вредина и повторюша. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда врет. Вредина говорит правду, если высказывание перед ним было ложным, и врет, если перед ним сказали правду. А повторюша, наоборот, говорит правду после правды и врет после лжи. Если вредина говорит первым, то он врет, а если повторюша говорит первым, то он говорит правду.

   Однажды один из друзей заболел, и остальные пошли гулять втроем. Первый сказал: «Второй — вредина, а третий — повторюша». «Нет, — поспорил второй, — это ты — вредина, а третий — повторюша». «Нет же, — возразил третий второму, — первый — вредина, а ты — повторюша!» Определите, кто из мальчиков заболел.

   (*П. Цишевич*)

   Ответ: лжец.

   Решение 1. Пусть все лгут. Тогда среди них не может быть рыцаря. Более того, первым должен говорить вредина, иначе он скажет правду после лжи. Тогда есть всего 2 варианта: ВПЛ или ВЛП, но в обоих случаях лжец скажет правду. Противоречие.
   Значит, кто-то говорит правду, значит, двое других вредина и повторюша. Лжец правду сказать не мог, значит, говорил рыцарь. Такие варианты возможны: РВП или ВПР. Значит, болеет лжец.

   Решение 2. Сначала понимаем, что ни вредина, ни повторюша не могут болеть, так как тогда рыцарь не болен, а значит рыцарь говорит одну из фраз, но тогда он упоминает больного, чего не может быть.
   Пусть болеет рыцарь. Повторюша не может говорить первым, потому что он должен сказать правду, однако первый говорит, что третий — повторюша. Если первым будет говорить лжец, то в любом случае вредина будет говорить правду, чего опять же не может быть, потому что любой человек говорит, что вредина один из других.
   Значит, первым должен говорить вредина. Но тогда есть всего 2 варианта: ВПЛ или ВЛП, но в обоих случаях лжец скажет правду. Противоречие.
   Значит, болеет лжец. Такие варианты возможны: РВП или ВПР.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Правильно обосновано, кто не мог заболеть, но решение не доведено до конца — по 2 балла за каждого человека. Только правильный ответ — 2 балла.

4. На поляне в кругу сидят 4 белочки и 4 кролика через одного. У каждой белочки имеется какое-то количество орешков, а у каждого кролика какое-то количество морковок (количество орешков или морковок у животных может быть различным). Каждая белочка поделилась своими орешками с кроликами–соседями, причем поровну. Каждый кролик также поделился с соседями–белочками морковками поровну. На рис. 5 указано сколько в итоге орешков оказалось у трех кроликов и сколько морковок оказалось у трех белочек. Сколько орешков могло оказаться у четвертого кролика? Сколько морковок могло оказаться у четвертой белочки?

(*А. Бечина*)

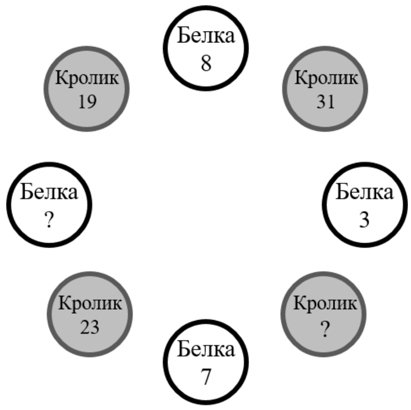


Рис. 5.

Ответ: 12 морковок у белочки, 35 орешков у кролика.

Решение. Будем рассматривать отдельно белок и кроликов. Раскрасим белок через одну в черный и белый цвет. Каждый кролик отдал одинаковое количество морковок черной и белой белке. Это означает, что суммарное количество морковок у «белых» белок равно суммарному количеству морковок у «черных» белок. Если у четвертой белки x морковок, то получается уравнение $x + 3 = 8 + 7$. Следовательно у четвертой белки оказалось 12 морковок. Количество орешков у четвертого кролика находится аналогично.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Решение верное, но допущена арифметическая ошибка — 6 баллов. Задача решена только для одного вида животных — 4 балла. Доказано, что суммарное количество морковок у «белых» белок равно суммарному количеству морковок у «черных» белок (или аналогичное утверждение для кроликов) — 2 балла. Только правильный ответ — 1 балл.

5. Три начинающих орнитолога Сорокин, Соколов и Синицин считали птиц в парке четырех видов. Так как орнитологи начинающие, каждый из них правильно различает два вида, а два других может перепутать: один путал ворон и воробьев, другой — воробьев и голубей, третий — голубей и снегирей. Результаты их подсчетов приведены в таблице.

	Вороны	Воробьи	Голуби	Снегири
Сорокин	5	11	5	2
Соколов	5	9	5	4
Синицин	6	8	7	2

Сколько птиц каждого вида было в парке? (*А. Бечина*)

Ответ: вороны — 5, воробьи — 9, голуби — 7, снегири — 2.

Решение. Ошибиться при подсчете ворон мог только один из них, а двое других правильно подсчитали количество ворон. Поэтому ворон было 5. Значит в подсчете ворон ошибся Синицин он путает ворон и воробьев, а значит голубей и снегирей посчитал правильно. Получается, что голубей было 7, а снегирей — 2. Отсюда мы видим, что Сорокин посчитал правильно снегирей, и получается, что он неправильно считает воробьев и голубей. Остается Соколов, который путает голубей и снегирей, тогда ворон и воробьев считает правильно. Получается, что воробьев было 9.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Правильно обосновано кто что путает — по 1 баллу за каждого орнитолога. Правильно обосновано количество птиц — по 1 баллу за вид.

6. На забеге встретились 10 участников с номерами от 1 до 10. Участник забега Иванов знаком ровно с 3 другими участниками, при этом у каждого из его знакомых четный номер. Участник забега Петров тоже знаком с 3 участниками, но у всех его знакомых номера нечетные. А участник забега Сидоров знаком ровно с 4 участниками. Докажите, что у Сидорова есть общий знакомый с Петровым или Ивановым. (*А. Лукьянов*)

Решение. Рассмотрим два случая: Петров и Иванов могут быть либо знакомы, либо не знакомы.

I случай. Если Петров и Иванов знакомы, схема их знакомства выглядит так, как показано на рисунке 6, при этом отрезок означает дружбу между участниками. Синим цветом обозначены участники с четным номером, красным — с нечетным.

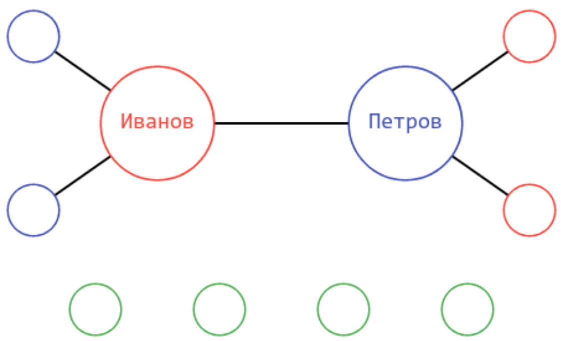


Рис. 6

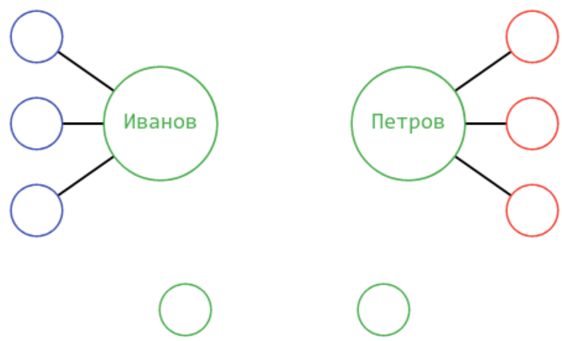


Рис. 7

а) Если в представленной схеме Сидоров является другом Петрова, то есть маленьким красным кружком, то Петров — общий знакомый Иванова и Сидорова; если же Сидоров является другом Иванова (маленьким синим кружком), то Иванов — общий знакомый Петрова и Сидорова.

б) Если Сидоров не дружит ни с Петровым, ни с Ивановым, то Сидоров — зеленый кружок. Но тогда по принципу Дирихле он соединен хотя бы с одним не зеленым кружком. Если с красным — то этот красный кружок будет общии знакомый Сидорова и Петрова, если с синим — то Сидорова и Иванова.

II случай. Если Петров и Иванов не знакомы, схема их знакомства выглядит так, как показано на рисунке 7.

Лемма. Сидоров дружит хотя бы с одним не зеленым кружком.
□ Пусть это не так. Поскольку у Сидорова 4 друга, то он дружит со всеми зелеными кружками (т.е. сам он не является зеленым кружком). Тогда он является другом Иванова (имеет четный номер), а также является другом Петрова (имеет нечетный номер). Противоречие. ■

Получается, Сидоров соединен хотя бы с одним не зеленым кружком. Если с красным — то этот красный кружок будет общии знакомый Сидорова и Петрова, если с синим — то Сидорова и Иванова.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Верно рассмотрен случай Iа) — 1 балл. Верно рассмотрен случай Iб) — 2 балла. Верно рассмотрен случай II, когда Сидоров является другом Петрова или Иванова — 2 балла. Верно рассмотрен случай II, когда Сидоров не является другом ни Петрова, ни Иванова — 2 балла.