

Третий тур

1.

Игровой автомат работает на красных и синих жетонах следующим образом: либо просто проглатывает жетон (такой жетон мы назовем проигрышным), либо проглатывает жетон и выдает приз – шесть жетонов другого цвета. Юра начал играть с одним красным жетоном и через некоторое время остался без жетонов. Докажите, что количество проигрышных синих жетонов не равно количеству проигрышных красных жетонов.

Решение. Заметим, что всякий раз, когда Юра получает премиальные жетоны, остаток от деления на 7 разности между количеством красных и количеством синих жетонов не меняется. Если же Юра проигрывает жетон, разность увеличивается на 1, когда проигран синий жетон и уменьшается на 1, когда проигран красный. Если бы количество проигрышных синих жетонов равнялось количеству проигрышных красных, остаток от деления на 7 разности между количеством красных и количеством синих жетонов не изменился бы. Но он изменился: вначале был равен 1, а в конце – 0.

2.

Набор гирь называют полным, если этими гирями можно отвесить на двухчашечных весах любое целое число килограммов от 1 до суммы весов всех гирь набора (гири можно класть только на левую чашу весов). Из полного набора выбросили гирю наибольшего веса. Докажите, что набор остался полным. Все гири весят целое число килограммов.

Решение. Лемма. Набор гирь является полным тогда и только тогда, когда вес каждой гири не более чем на 1 кг тяжелее суммарного веса всех более легких гирь.

Доказательство Рассмотрим набор гирь $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Пусть S_k – сумма первых k гирь набора (где $k < n$). Тогда этими k гирями нельзя представить гири, большие, чем S_k . Если $a_{k+1} > S_k + 1$, то нашим набором гирь нельзя представить вес $S_k + 1$, что противоречит полноте набора. Если же для каждого $k < n$ выполняется неравенство $a_{k+1} \leq S_k + 1$, то индукцией по k докажем, что набор является полным. Очевидно, $a_1 = 1$, что доказывает базу. Пусть первые k гирь дают все возможные веса от 1 до S_k . Тогда любой вес X от $a_{k+1} + 1$ до S_{k+1} можно получить, прибавив к весу a_{k+1} вес $X - a_{k+1}$, что не превышает S_k и по индукционному предположению представляется в виде суммы гирь, меньших a_{k+1} .

Таким образом, лемма доказана. Очевидно, что после удаления самой тяжелой гири оставшиеся гири удовлетворяют условиям леммы, а, значит, составляют полный набор.

3. Сумма десяти натуральных чисел равна 1000. К тому же произведение факториалов этих же 10 чисел оказалось десятой степенью натурального числа. Докажите, что все эти натуральные числа совпадают.

Решение: От противоположного. Пусть не все десять чисел одинаковые. Тогда хотя бы одно будет не меньше 101. В факториале этого числа будет 101 – простое число, которое должно тогда в десятой степени быть в произведении чисел. Расположим все 10 чисел по возрастанию и количество множителей, кратных 101, не превосходит $\frac{a_1}{101} + \frac{a_2}{101} + \frac{a_3}{101} + \dots + \frac{a_{10}}{101} = \frac{1000}{101} < 10$. Получили противоречие.

4. Имеется пять натуральных чисел. Вычислили и написали все их попарные суммы, повторяющиеся суммы написали один раз. В результате этого оказались написанными суммы 37, 50, 63. Восстановите пять чисел, из которых были получены эти суммы.

Ответ: 12, 25, 25, 25, 38

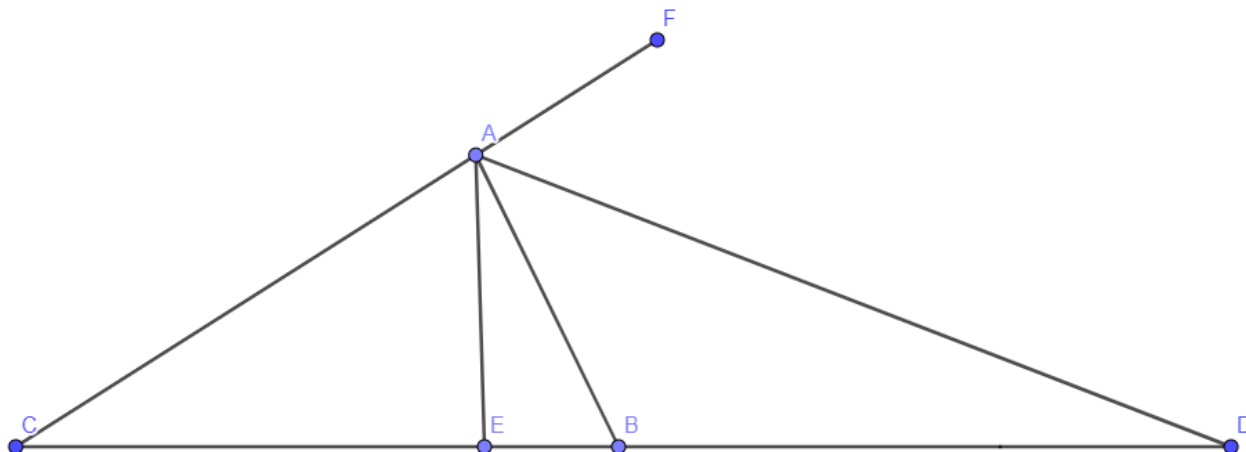
Решение. Из исходных пяти чисел одинаковых может быть: 0, 2, 3, 4 и 5. Если все будут одинаковыми, то сумма будет всего одна (не подходит). Если будет 4 одинаковых, то сумм будет всего две (сумма двух одинаковых, сумма одного из одинаковых и оставшегося), а не три – значит тоже не подходит. Если бы все числа были разные, то любое из них дало бы четыре разные суммы с оставшимися, а их получилось три – тоже не подходит. Если бы было всего два одинаковых числа, получилось бы 4 разные суммы. Получается, что было три одинаковых числа.

Сумма двух одинаковых чисел чётна, а у нас только одна чётная сумма – 50. Значит три одинаковых числа – 25. А ещё два - это 38 (63-25) и 12 (37-25).

5. В треугольнике ABC высота, опущенная из вершины A , равна половине отрезка биссектрисы внешнего угла при той же вершине до пересечения с продолжением стороны BC . При этом угол B больше угла C .

Доказать, что $\angle B - \angle C = 60^\circ$.

Решение.



Обозначим высоту AE через h . Тогда биссектриса внешнего угла AD равна $2h$. В прямоугольном треугольнике ADE $\angle D = 30^\circ$, поскольку $AE = AD/2$, а поэтому $\angle EAD = 60^\circ$.

Введем обозначения. $\angle FAD = \angle DAB = \alpha$, $\angle BAE = \beta$.

Имеем: $\angle EAD = \alpha + \beta = 60^\circ$. $\angle B = \pi/2 - \beta$. Далее, $\angle CAE = 180^\circ - 2\alpha - \beta$.

Следовательно, $\angle C = 90^\circ - (180^\circ - 2\alpha - \beta) = -90^\circ + 2\alpha + \beta$.

Таким образом, $\angle B - \angle C = 90^\circ - \beta - (-90^\circ + 2\alpha + \beta) = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, что и требовалось доказать.

6. Лига A и B . В турнире участвуют 32 соперника. Никакие два из них не равны по силе игры, и в матче один на один сильнейший всегда побеждает. Силы соперников в турнире не меняются во время его проведения: если A выиграл у B , B выиграл у C , то если бы A и C играли бы между собой, то A бы выиграл. Докажите, что для определения первых трех победителей -- золотого, серебряного, бронзового --- достаточно провести 39 матчей.

Решение.

Докажем, что 39 матчей достаточно. Чтобы определить золотого medalиста, организуем 16 пар и матчи между ними, затем 8 матчей победителей, 4 матча следующих победителей, 2 матча между победителями в этих четырех и, наконец, один матч — всего 31 матч. (См. Дополнение ниже).

Перейдем к определению серебряного призера. Серебряный medalист должен был в какой-то момент проиграть номеру 1; так как было 5 раундов, есть 5 кандидатов. Пусть C_i — кандидат, проигравший золотому medalисту в раунде i . Теперь пусть C_1 и C_2 сыграют, победитель затем сыграет с C_3 и т.д. После 4 матчей мы узнаем серебряного medalиста; предположим, это был C_k . Теперь бронзовый medalист должен был проиграть золотому medalисту или C_k , или обоим. (Если он проиграл кому-то ещё, этот кто-то находится ниже второго места). Серебряный medalист C_k выиграл $(k - 1)$ раз в первых раундах и $(5 - k)$ соперников $C_{k+1} \dots C_5$ при $k < 5$ а если $k = 5$, то он обыграл 4 соперников в первых раундах (и проиграл золотому medalисту) и одного соперника C_j с $j < 5$. Таким образом, есть либо $(k - 1 + 5 - k = 4)$, либо 5 кандидатов на третье место. Требуется не более 4 матчей, чтобы определить бронзового победителя из этих 5 кандидатов.

Всего необходимо $31 + 4 + 4 = 39$ матчей.

Приведем пример турнира, в котором 38 матчей недостаточно. Этот пример получается из алгоритма, написанного выше. Победитель А определяется по результатам 31-го матча. Серебряный призер – это игрок, проигравший А в 31-м матче, т.е. С₅. Бронзовым призером стал игрок, который проиграл С₅ в их парной встрече, т.е. С₄.

Дополнение. Имеется множество из 2^k попарно неравных элементов. Какое минимальное число попарных сравнений потребуется, чтобы найти наибольший элемент?

Для нахождения наибольшего элемента среди 2^k элементов необходимо провести $2^k - 1$ сравнений, чтобы гарантированно определить максимальный элемент. Докажем, что минимальное количество сравнений равно $2^k - 1$.

Рассмотрим процесс нахождения наибольшего элемента. В каждом сравнении мы исключаем один элемент из дальнейшего рассмотрения, поскольку по определению наибольший элемент должен быть больше или равен всем остальным элементам.

Таким образом, чтобы отобрать одного наибольшего среди $2^k - 1$ элементов, нам необходимо исключить $2^k - 1$ элементов. Поскольку на каждом этапе сравнения мы берем два элемента и определяем, какой из них больше, в худшем случае для нахождения наибольшего элемента, нам придется провести все эти сравнения.

6, Лига С. В турнире участвуют 33 соперника. Никакие два из них не равны по силе игры, и в матче один на один сильнейший всегда побеждает. Силы соперников в турнире не меняются во время его проведения: если А выиграл у В, В выиграл у С, то если бы А и С играли бы между собой, то А бы выиграл. Какое наименьшее количество матчей необходимо провести для определения первых двух сильнейших игроков -- золотого и серебряного?

Решение.

Докажем, что 37 матчей достаточно. Чтобы определить золотого medalиста, отделим одного игрока (случайным образом) и для остальных 32 организуем 16 пар и матчи между ними, затем 8 матчей победителей, 4 матча следующих победителей, 2 матча между победителями в этих четырех и, наконец, один матч — всего 31 матч. Победитель этого турнира из 32 команд сыграет с отделенным игроком. Победитель последнего, 32 матча, будет самым сильнейшим.

Перейдем к определению серебряного призера. Серебряный medalист должен был в какой-то момент проиграть номеру 1; так как было 5 раундов и затем последняя игра между победителем всех раундов и 33м игроком, то всего есть 6 кандидатов.

Пусть C_i — кандидат, проигравший золотому медалисту в раунде i . Теперь пусть C_1 и C_2 сыграют, победитель затем сыграет с C_3 и т.д. После 5 матчей мы узнаем серебряного медалиста.

Итого потребуется $32+5=37$ матчей.

Дополнение. Имеется множество из 2^k попарно неравных элементов. Какое минимальное число попарных сравнений потребуется, чтобы найти наибольший элемент?

Для нахождения наибольшего элемента среди 2^k элементов необходимо провести $2^k - 1$ сравнений, чтобы гарантированно определить максимальный элемент. Докажем, что минимальное количество сравнений равно $2^k - 1$.

Рассмотрим процесс нахождения наибольшего элемента. В каждом сравнении мы исключаем один элемент из дальнейшего рассмотрения, поскольку по определению наибольший элемент должен быть больше или равен всем остальным элементам.

Таким образом, чтобы отобрать одного наибольшего среди $2^k - 1$ элементов, нам необходимо исключить $2^k - 1$ элементов. Поскольку на каждом этапе сравнения мы берем два элемента и определяем, какой из них больше, в худшем случае для нахождения наибольшего элемента, нам придется провести все эти сравнения.

Пример, при котором серебряный медалист определяется в результате 37 матча, вытекает из этих рассуждений. Если серебряным медалистом (вторым по силе участником турнира) будет отделенный от остальных в самом начале 33-й игрок, которому мы присвоили номер C_6 , то он будет определен в последнем, 37 матче между C_5 и C_6 .

Для лиги С

4. Найдите все двузначные числа, которые при удвоении становятся полными квадратами, а при утроении — полными кубами, и докажите, что других нет.

Ответ: 72.

Решение. Утроенное двузначное число может лежать в интервале от 30 до 297 включительно. Начинаем проверять кубы натуральных чисел. 3 в кубе (27) не дотягивает, а вот 7^3 уже превышает 297, поэтому допустимы только кубы чисел 4, 5, 6. Утроение числа может давать полный куб, когда он кратен 3, а из наших трёх чисел только 6 кратно трём. Получаем число 72, которое при утроении даёт

куб шести. Нужно проверить ещё и первое условие. Действительно удвоение 72 даёт полный квадрат 12.

Для лиги В

4. Лицей планирует отправить на олимпиаду в «Сириус» свою команду. Олимпиада будет проходить по трём предметам: математике, информатике и экономике. Каждая из них проходит в отдельный день. Бюджет на поездку ограничен, поэтому стоит задача отправить наименьшее количество самых талантливых учеников. Но организаторы поставили ограничения на количество участников: во-первых, по каждому предмету в команде должно быть ровно 5 учеников; во-вторых, в командах по математике и информатике должно быть не более двух одинаковых участников; в-третьих, в командах по информатике и экономике должно быть не более трёх одинаковых участников; в-четвёртых, в командах по математике и экономике может быть не более одного общего ученика. Какое наименьшее количество учеников может отправить Лицей на олимпиаду?

Ответ: 9.

Решение. Согласно формуле включений-исключений для трёх множеств $|A+B+C|=|A|+|B|+|C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|$. Наименьшая правая часть, согласно условиям получается при $5+5+5-2-1-3+0=15-6=9$. Для этой оценки нужно построить пример (см. на рисунке).

