Устная командная олимпиада

1. (1 балл)

Натуральные числа от 1 до 6 (каждое по одному разу) нанесены на грани кубика, который подкинули дважды. При первом броске сумма чисел на боковых гранях оказалась равна 16, при втором – 13. Какое число было нанесено на грани, противоположной грани с числом 5?

Ответ: 3.
Решение. Боковых граней четыре, остальных – две. Сумма всех чисел на кубике – 21 (1+2+3+4+5+6). Значит сумма двух не боковых граней при первом броске равна 5 (21-16), а при втором – 8 (21-13). Две противоположные грани могут дать сумму 5 в двух случаях: 1+4 или 2+3. Сумму 8 могут дать тоже только две пары: 6+2 или 5+3. Если при первом броске напротив 2 оказалась тройка, то при втором броске не может быть ни 6 против 2, ни 5 против 3. Значит, возможно только, что против 1 выпала 4 при первом броске. То есть на боковых гранях были числа 2, 3, 5 и 6. Если при втором броске выпало 6 и 2, то напротив 3 остаётся только 5. Если при втором выпало 5 и 3, то расположение 6 и 2 на боковых гранях не противоречат результату первого броска. Получается, против 5 может быть только 3.

1. (1 балл)

На доске написано число 11. За каждый последующий ход дописываем ещё одно число по следующему правилу: оно либо в два раза больше некоторого числа, уже записанного на доске, либо равно сумме некоторых двух чисел, уже записанных на доске. За какое минимальное количество ходов можно получить на доске число 891?

Ответ: 8.
Решение. 891=11*81. Удвоение на каждом шаге даёт максимальный рост наибольшего числа на доске. Максимально число, которое можно получить за 6 ходов = 11*2^6=11*64. Чтобы за 7 ходов достичь цели, нужно 7-м ходом прибавить 11(81-64)=11*17, но такого числа нет на доске, потому что у нас на доске только 11 и чётные числа. Если бы было лишь пять удвоений, то нужно было бы добавить 11(81-32)=11*49=11*(1+32+16). 11*1, 11*16 и 11*32 выписаны на доске, их можно сложить, но на это понадобится ещё три хода (итого 8 ходов). Если удвоений будет меньше, чем 5, то понадобится более 8 ходов. Получаем, что 8 – минимальное количество ходов.

3. (1 балл)

Найти все целые числа n, при которых дробь $\frac{n^3-n^2+2}{n-1}$ есть целое число.

Ответ: –1, 0, 2 или 3.

Решение. $\frac{n^3-n^2+2}{n-1} = n^2 + \frac{2}{n-1}$.

Число $\frac{2}{n-1}$ целое тогда и только тогда, когда $n - 1 = -2, -1, 1$ или 2.

Тогда $n = -1, 0, 2$ или 3.

4. (2 балла)

В Центре дополнительного образования ученики занимаются в нескольких языковых кружках. От каждого кружка на олимпиаду направлено по пять человек. Оказалось, что каждый из направленных на олимпиаду занимается ровно в двух кружках, и любая пара кружков представлена по крайней мере одним учеником. Сколько языковых кружков в Центре и сколько учеников было направлено на олимпиаду? Найти все возможные решения и доказать, что других нет.

Ответ: 1) кружков 2, учеников 5; 2) кружков 4, учеников 10; 3) кружков 6, учеников 15.
Решение.
Пусть число кружков n. Тогда число учеников, направленных на олимпиаду, равно $\frac{5n}{2}$.
Здесь учтено, что каждый ученик представляет ровно два кружка.
Если кружков больше, чем 6, то каждый кружок должен делегировать больше пяти учеников (каждая пара кружков представлена на олимпиаде), а это противоречит условию. Итак, кружков не больше 6, и $\frac{5n}{2}$ целое число. Значит, $n = 2$ или $n = 4$ или $n = 6$.
Примеры.
При $n = 2$ кружков всего два, учеников, направленных на олимпиаду, 5.
При $n = 4$ две пары кружков представлены одним учеником, остальные пары кружков -- двумя учениками, всего учеников 10.
При $n = 6$ каждая пара кружков делегирует одного ученика, всего учеников получается 15.

5. (2 балла)

Найти наименьшее натуральное число, удовлетворяющее двум условиям. Во-первых, сумма цифр числа должна быть кратна 11. Во-вторых, сумма цифр следующего за ним натурального числа должна быть кратна 11.

Ответ: 2899999
Решение. Если в загаданном числе последняя цифра не 9, то добавление 1 увеличит сумму цифр на 1, поэтому кратность 11 суммы цифр будет нарушена. Значит, последнее число может быть только 9. Если следующая цифра (справа налево) не равна 9, то сумма цифр уменьшится на 8 (заменим девятку в конце на

ноль, а предпоследнюю цифру увеличим на 1). Опять нарушается кратность 11. Значит, и вторая цифра справа должна быть 9. Таким же методом мы приходим, что и третья цифра должна быть равна 9. На каждом ходе мы вычитаем несколько девяток и добавляем единицу. Нам интересно, когда мы можем остановить записывать девятки.

--9+1=-8

-9*2+1=-17

-9*3+1=-26

-9*4+1=-35

-9*5+1=44

А вот 44 кратно 11, то есть мы сохраняем кратность 11 после 5 девяток. Итак, у нас появилась надежда, что найти число. В конце числа стоят пять девяток. Теперь нужно сделать так, чтобы сумма цифр исходного числа была кратна 11. 5*9=45 – мы накопили уже сумму цифр 45. Ближайшее число (помним, что нам нужно наименьшее натуральное), кратное 11, - это 55. Не хватает 10. За один разряд 10 не получить, поэтому точно придётся дописать не менее 2 цифр. Наименьшее число будет, если первая цифра равна 1, но тогда вторая – 9, а мы поняли, что у нас всего пять девяток. Не подходит. Значит первая цифра – 2. В пару к ней берём вторую цифру 8, чтобы в сумме получилось 10. Итого получаем 2899999.

6. (2 балла)

Есть неубывающая последовательность из трёх простых чисел. Произведение этих чисел совпало с их суммой. Найти все возможные наборы, удовлетворяющие этому условию, и доказать, что других нет.

Ответ: (2;3;5) и (3;3;3).

Решение. Зададим неубывающую последовательность a, b, c, тогда abc=3(a+b+c). Правая часть кратна 3, значит и левая кратна трём. Поскольку слева у нас произведение простых чисел, то среди них обязательно есть тройка. Если тройка – последнее число в последовательности, то возможны наборы: (3;3;3), (2;3;3), (2;2;3). Только первый набор удовлетворяет исходному уравнению.

Если тройка – второе число, то возможны наборы типа (3;3;c) и (2;3;c). Первый набор даёт уравнение 3*3*c=3*(3+3+c), то есть 3c=6+c и c=3. Это набор мы уже отобрали (3;3;3). Второй набор даёт 2*3*c=3(2+3+c), то есть 2c=5+c и c=5. Получаем ещё один пригодный набор (2;3;5).

Если тройка – первое число, то случаи с тройками на других позициях мы уже рассмотрели. Получаем

3*b*c=3*(3+b+c) или bc=3+b+c → b(c-1)=3+c → b(c-1)=4+c-1 → (b-1)(c-1)=4.

Это уравнение не имеет решений в простых числах, больших трёх.

Получается, что мы перебрали все возможные случаи.

7. (3 балла)

Решить уравнение $x^4 - 2y^2 = 1$ в целых числах.

Решение. $2y^2 = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Отсюда следует, что x нечетное число, а y четное, то есть $x = 2p + 1$, $y = 2q$.

Тогда уравнение записывается в виде $q^2 = (p^2+p)(2(p^2+p)+1)$.

Сомножители (p^2+p) и $(2(p^2+p)+1)$ взаимно просты, поскольку каждый их общий делитель является и делителем разности.

Следовательно, каждый из сомножителей – точный квадрат.

Если $p(p+1) = z^2$, то из тех же соображений p и $p + 1$ являются точными квадратами, то есть $p = a^2$, $p+1 = b^2$. Тогда $b^2 - a^2 \geq (a+1)^2 - a^2 = 2a+1 \geq 1$.

Следовательно, единственная возможность $a = 0, b = 1$. Тогда $p = 0$, то есть

$x = \pm 1, y = 0$.

Ответ: (1, 0), (-1, 0).

8. (3 балла)

Доказать, что если $a + b \geq 1$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Решение. $(a+b)^2 \geq 1$. Сложим это неравенство с неравенством $(a-b)^2 \geq 0$.

Получим $2a^2 + 2b^2 \geq 1$, то есть $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

Возведя обе части неравенства в квадрат, получим $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}$.

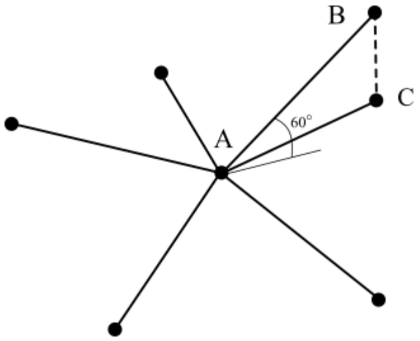
Сложим это неравенство с неравенством $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$.

Получим $2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4}$, то есть $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

9. (3 балла)

На болоте 7 кочек, на каждой кочке сидит лягушка. Все попарные расстояния между кочками различны. В некоторый момент лягушки одновременно прыгнули на ближайшую кочку. Могло ли так получиться, что на одной кочке после прыжка собрались 6 лягушек?

Решение. Ни на какой кочке не может оказаться 6 лягушек. Докажем от противного. Пусть на одной кочке после прыжка оказалось 6 лягушек. Назовем эту кочку A. Проведем из этой кочки лучи в те кочки, с которых прыгнули лягушки. Найдется угол между какими-то двумя лучами, меньший 60^0. ($360^0 : 6 = 60^0$.) Назовем соответствующие кочки B и C. В треугольнике ABC один из углов, ABC или ACB, больше угла BAC. Значит, или расстояние AB, или расстояние AC больше расстояния BC. Значит, одна из лягушек, первоначально сидевшая на одной из кочек B или C, не могла оказаться на кочке A.



10. (3 балла)

Доказать, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ и $ac>0$, то имеет место неравенство $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geq 4$.

Решение. Из условия выразим $b=\frac{2ac}{a+c}$ (знаменатель не равен 0, поскольку $ac>0$, поэтому числа a и c имеют общий знак).

Учитывая это равенство, получаем $\frac{a+b}{2a-b}=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a(a+c)+2ac}{2a(a+c)-2ac}=\frac{a+3c}{2a}$.

Аналогично: $\frac{a+b}{2c-b}=\frac{3a+c}{2c}$.

Сложив почленно два равенства, получим:

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{3a+c}{2c}=\frac{2ac+3(a^2+c^2)}{2ac}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 1+\frac{3}{2}\cdot 2=4.$$

11. (3 балла)

Доказать, что при каждом натуральном n верно неравенство $2^{n-1}\cdot n!\ \leq n^n$.

Решение.

$$(n-1)!=\sqrt{(n-1)!}\sqrt{(n-1)!}=\sqrt{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot(n-1)}\sqrt{(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=$$

$$=\sqrt{1(n-1)}\cdot\sqrt{2\cdot(n-2)}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(n-1)\cdot 1}\leq\frac{1+(n-1)}{2}\cdot\frac{2+(n-2)}{2}\cdot\frac{(n-1)+1}{2}=\frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Умножим обе части на n и получим: $(n-1)!\leq\frac{n^n}{2^{n-1}}$, то есть $2^{n-1}\cdot(n-1)!\leq\ n^n$.

12. (4 балла)

Решить уравнение $f(f(f(f(\mathrm{x}))))=2x^2$, если $f(\mathrm{x})=(x+1)/(1-x)$

Ответ: 0,5.

Решение. $f(x) = \frac{x+1}{1-x} = -1 - \frac{2}{x-1}$, тогда $f\big(f(x)\big) = -1 - \frac{2}{\left(-1-\frac{2}{x-1}\right)-1} = -1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x-1}} = -1 + \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x}$, тогда $f\left(f\big(f(x)\big)\right) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = -1 - \frac{2}{\left(-\frac{1}{x}\right)-1} = -1 + \frac{2x}{1+x} = \frac{x-1}{1+x}$, тогда $f\left(f\left(f\big(f(x)\big)\right)\right) = f\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = -1 - \frac{2}{\left(\frac{x-1}{1+x}\right)-1} = x + 1 - 1 = x$, тогда

$x = 2x^2$, то есть $x(1-2x) = 0$, то есть $x = 0$ или $\frac{1}{2}$.

В цепочке выше $x = 0$ решение не подходило, так как на 0 делить нельзя.
Корень 0,5 не имел ограничений.