Задачи для математического турнира 2026

Первый тур

1. В ряд стоят 33 девочки, и каждая держит по ромашке. В некоторый момент каждая из девочек передаёт свою ромашку девочке, стоящей от неё через одну (все девочки передают ромашки одновременно). Может ли оказаться так, что у каждой девочки после передачи опять будет по одной ромашке?

2. Докажите, что $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169 ни при каком натуральном n.

3. Докажите, что можно найти более тысячи троек натуральных чисел a, b, c, для которых выполняется равенство $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

4. Имеется 10 отрезков, причём известно, что длина каждого – целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка – по сантиметру, самый длинный – 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

5. Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы "Г", состоящие из четырёх клеток?

6. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь наибольшая диагональ этой трапеции?

Второй тур

1. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

2. В таблицу 8×8 вписаны все целые числа от 1 до 64. Доказать, что при этом найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 5. (Соседними называются числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону.)

3. $2^n = 10a + b$. Доказать, что если $n > 3$, то ab делится на 6. (n, a и b – натуральные числа, $b < 10$.)

4. Доказать, что в круг радиуса 1 нельзя поместить без наложений два треугольника, площадь каждого из которых больше 1.

5. Пятеро друзей скинулись на покупку. Могло ли оказаться так, что каждые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

6. На плоскости нарисовано пять различных окружностей. Известно, что каждые четыре из них имеют общую точку. Докажите, что все пять окружностей проходят через одну точку.

Третий тур

1. В шахматном турнире участвовали два ученика 7 класса и некоторое число учеников 8 класса. Два семиклассника вместе набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? (Каждый из участников турнира играет с каждым из остальных по одной партии. За выигрыш даётся 1 очко, за ничью – ½ очка, за проигрыш – 0 очков.)

2. Найти все такие натуральные k, которые можно представить в виде суммы двух натуральных взаимно простых чисел, отличных от 1.

3. Числа 1, 2, 3, ..., 25 расставляют в таблицу 5×5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?

4. В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная – 24 оборота, причём, как обычно, минутная стрелка длиннее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная – 24). Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления итальянских часов, которые встречаются и на обычных часах. Сколько таких положений существует на итальянских часах в течение суток? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах.)

5. В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найдите длину стороны квадрата и выясните, где расположена точка O - вне или внутри квадрата.

6. 10 журналов лежат на журнальном столе, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать пять из них так, что оставшиеся журналы будут покрывать не менее половины площади стола.

Задачи для математического турнира 2026

Первый тур

1. В ряд стоят 33 девочки, и каждая держит по ромашке. В некоторый момент каждая из девочек передаёт свою ромашку девочке, стоящей от неё через одну (все девочки передают ромашки одновременно). Может ли оказаться так, что у каждой девочки после передачи опять будет по одной ромашке?

Решение

Предположим, что девочки смогут обменяться ромашками указанным образом. Пронумеруем стоящих девочек, например, слева направо. Для того, чтобы у первой девочки оказалась ромашка, она должна получить ромашку от третьей девочки. В свою очередь, третья девочка получит ромашку от первой, т.е. первая и третья девочка обменяются ромашками. Перейдем к пятой девочке. Чтобы она после обмена имела одну ромашку, пятая и седьмая девочки должны обменяться ромашками. Далее, девятая должна поменяться с одиннадцатой, тринадцатая с пятнадцатой, и так далее. Таким образом, все девочки, стоящие на нечётных местах, должны разбиться на пары. Но это невозможно, так как на нечётных местах – 17 девочек.

Ответ

Не может.

2. Докажите, что $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169 ни при каком натуральном n.

Решение

$n^2 + 5n + 16 = (n - 4)^2 + 13n$. Если это число делится на 169, то $n - 4$ делится на 13. Но тогда $(n - 4)^2$ делится на 169, а $13n$ – не делится, поскольку из делимости $n - 4$ на 13 следует, что n не делится на 13.

3. Докажите, что можно найти более тысячи троек натуральных чисел a, b, c, для которых выполняется равенство $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

Решение

Данное равенство можно записать в виде

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{15} + \left(\frac{b}{c}\right)^{15} = c.$$

Выберем произвольные натуральные числа n и m и положим $c = n^{15} + m^{15}$, $a = cn$, $b = cm$.

4. Имеется 10 отрезков, причём известно, что длина каждого – целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка – по сантиметру, самый длинный – 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

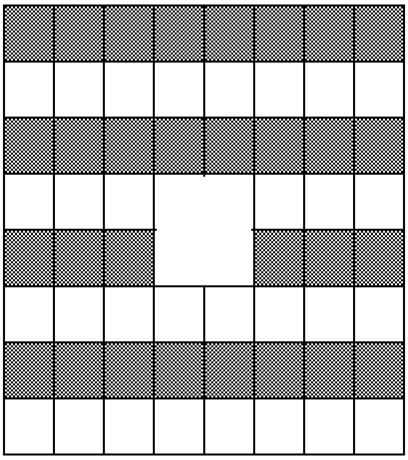
Решение

Предположим противное: ни из каких трёх отрезков нельзя составить треугольник. Рассмотрим длины отрезков в сантиметрах по возрастанию: $l_1 = l_2 = 1 \le l_3 \le l_4 \le ... \le l_{10} = 50$. Так как из трёх самых коротких отрезков нельзя составить треугольник, то $l_3 \ge l_1 + l_2 = 2$. Аналогично $l_4 \ge l_2 + l_3 \ge 1 + 2 = 3$. Далее, $l_5 \ge 2 + 3 = 5$, $l_6 \ge 3 + 5 = 8$, $l_7 \ge 5 + 8 = 13$, $l_8 \ge 8 + 13 = 21$, $l_9 \ge 13 + 21 = 33$, $l_{10} \ge 21 + 33 = 55$. Противоречие.

5. Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы "Г", состоящие из четырёх клеток?

Решение

Предположим, что искомое разрезание возможно. Покрасим горизонтали доски поочередно в два цвета ("матрасиком", см. рис.). Тогда в каждой фигурке, независимо от её расположения, будут три клетки одного цвета и одна клетка другого цвета. Так как в оставшейся части доски – по 30 клеток каждого цвета, то фигурок при разрезании может получиться только чётное количество. С другой стороны, фигурок будет $(64 – 4) : 4 = 15$, то есть нечётное количество. Противоречие.



Ответ

Нельзя.

6. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь наибольшая диагональ этой трапеции?

Решение

Длины диагоналей трапеции обозначим через d_1 и d_2, длины их проекций на основание — через p_1 и p_2, длины оснований — через a и b, высоту — через h. Пусть для определенности $d_1 \ge d_2$. Тогда $p_1 \ge p_2$. Ясно, что $p_1 + p_2 \ge a + b$. Поэтому $p_1 \ge (a + b)/2 = S/h = 1/h$. Следовательно, $d_1{}^2 = p_1{}^2 + h^2 \ge \frac{1}{h^2} + h^2 \ge 2$, причем равенство достигается, только если $p_1 = p_2 = h = 1$. При этом $d_1 = \sqrt{2}$.

Второй тур

1. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

Решение

Так как звёзд бесконечное число, то хотя бы один из параметров принимает бесконечное число значений. Пусть это размер. Тогда выберем звезду A с наименьшей яркостью. Пусть размер звезды A выражается числом n. Поскольку размер принимает бесконечное количество значений, найдётся звезда B размера больше n. Она не уступает звезде A ни по яркости, ни по размеру.

2. В таблицу 8×8 вписаны все целые числа от 1 до 64. Доказать, что при этом найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 5. (Соседними называются числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону.)

Решение

Рассмотрим горизонтальную строку таблицы, содержащую число 1, и вертикальный столбец, содержащий число 64. Мы можем, двигаясь сначала по строке, а потом по столбцу, пройти от клетки, в которой написано число 1, к клетке, в которой написано число 64, причём наш путь будет состоять не более чем из 14 ходов (ходом мы называем переход из любой клетки в соседнюю).

Предположим, что разность между каждыми двумя соседними числами в таблице меньше 5. Тогда за 14 или меньшее число ходов, которые мы сделали при переходе от 1 к 64, к исходному числу 1 прибавится не более чем $14 \times 4 = 56$. Между тем $64 - 1 = 63$. Противоречие.

3. $2^n = 10a + b$. Доказать, что если $n > 3$, то ab делится на 6. (n, a и b – натуральные числа, $b < 10$.)

Решение

Поскольку $2^4 = 16$, число 2^{4k} оканчивается на 6. Соответственно, числа 2^{4k+1}, 2^{4k+2}, 2^{4k+3} оканчиваются на 2, 4, 8. Для чисел вида 2^{4k} утверждение очевидно, поскольку $b = 6$. Заметим также, что число b всегда чётно. Поэтому достаточно проверить, что числа $2^{4k+1} - 2$, $2^{4k+2} - 4$, $2^{4k+3} - 8$ делятся на 3, иными словами, что $2^{4k} - 1$ делится на 3. Но это число делится на 3, поскольку $2^{4k} = 4^{2k}$ при делении на 3 дает остаток 1.

4. Доказать, что в круг радиуса 1 нельзя поместить без наложений два треугольника, площадь каждого из которых больше 1.

Решение

Предположим, что в круг радиуса 1 помещены два треугольника, площадь которых больше 1. Достаточно доказать, что оба треугольника содержат центр O круга. Докажем, что если треугольник ABC, помещённый в круг радиуса 1, не содержит центра круга, то его площадь меньше 1. В самом деле, для любой точки, лежащей вне треугольника, найдётся прямая, проходящая через две вершины и отделяющая эту точку от третьей вершины. Пусть для определённости прямая AB разделяет точки C и O. Тогда $h_c < 1$ и $AB < 2$, поэтому $S = h_c \cdot AB/2 < 1$.

5. Пятеро друзей скинулись на покупку. Могло ли оказаться так, что каждые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

Решение

Пусть друзья внесли a, b, c, d и e рублей соответственно. Тогда общая сумма S внесённых денег равна $a + b + c + d + e$.
Предположим, что каждые два друга внесли меньше чем ${}^{S}/_{3}$ рублей. Тогда каждое из чисел $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + e$ и $e + a$ меньше ${}^{S}/_{3}$. Складывая, получим $2(a + b + c + d + e) < {}^{5S}/_{3}$, то есть $6S < 5S$. Противоречие.

Ответ

Не могло.

6. На плоскости нарисовано пять различных окружностей. Известно, что каждые четыре из них имеют общую точку. Докажите, что все пять окружностей проходят через одну точку.

Подсказка

Рассмотрите три точки пересечения трёх четвёрок окружностей. Эти точки лежат на двух окружностях, то есть некоторые две из этих точек совпадают.

Решение

Обозначим окружности цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Пусть A – общая точка окружностей 1, 2, 3, 4; B – общая точка окружностей 1, 2, 3, 5; C – общая точка окружностей 1, 2, 4, 5. Как видно, каждая из точек A, B, C принадлежит окружностям 1 и 2. Поскольку две различные окружности пересекаются не более, чем по двум точкам, некоторые две из точек A, B, C совпадают. Через эту пару совпадающих точек и проходят все пять окружностей.

Третий тур

1. В шахматном турнире участвовали два ученика 7 класса и некоторое число учеников 8 класса. Два семиклассника вместе набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? (Каждый из участников турнира играет с каждым из остальных по одной партии. За выигрыш даётся 1 очко, за ничью – ½ очка, за проигрыш – 0 очков.)

Решение

Пусть x – число восьмиклассников, y – число очков, набранных каждым восьмиклассником. Подсчитывая двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира, приходим к уравнению $xy + 8 = \frac{(x+2)(x+1)}{2}$, то есть $2y = \frac{(x+2)(x+1)-16}{x} = x + 3 - \frac{14}{x}$. Поэтому x принимает одно из значений 1, 2, 7, 14. Значения 1 и 2 отпадают, поскольку в этих случаях число $y < 0$. При $x = 7$ получаем $y = 4$. Такой турнир возможен: например, все партии завершились вничью; тогда каждый участник набрал по 4 очка. При $x = 14$ получаем $y = 8$. Такой турнир также возможен: например, один из семиклассников все партии проиграл, а все остальные встречи завершились вничью; тогда каждый участник, кроме последнего, набрал по 8 очков.

Ответ

7 или 14.

2. Найти все такие натуральные k, которые можно представить в виде суммы двух натуральных взаимно простых чисел, отличных от 1.

Решение

Любое нечётное число $k = 2n + 1 > 3$ легко представить в нужном виде: $k = n + (n + 1)$. Чётное число, кратное 4, ($k = 4n$) представляется в виде суммы $2n + 1$ и $2n - 1$. Последнее число больше 1 при $k \geq 8$. Наконец, число k вида $4n + 2$ представляется в виде суммы чисел $(2n + 3) + (2n - 1)$. Эти числа взаимно просты, поскольку из разность равна 4, а 4 взаимно просто с любыми нечётными числами. Последнее число больше 1 при $k \geq 10$. Таким образом, мы представили в нужном виде все числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6. Нетрудно проверить, что ни одно этих чисел в требуемом виде представить нельзя.

Ответ

Все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6.

3. Числа 1, 2, 3, ..., 25 расставляют в таблицу 5×5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?

Решение

Оценка. Сумма чисел трёх первых столбцов не меньше суммы первых 15 натуральных чисел, то есть не меньше 120. Прибавим ко всем числам первого столбца по двойке, а ко всем числам второго – по единице. При этом числа в каждой строке будут идти в неубывающем порядке, поэтому сумма чисел в третьем столбце будет не меньше, чем в каждом из двух первых, то есть не меньше $(120 + 5 + 10) : 3 = 45$. *Пример* расположения чисел, при котором сумма среднего столбца равна 45:

1	2	3	16	17
4	5	6	18	19
7	8	9	20	21
10	11	12	22	23
13	14	15	24	25

Аналогичное рассуждение даёт максимальную сумму 85 (рассматривается наибольшая возможная сумма чисел трёх последних столбцов).

Ответ

Наименьшее – 45, наибольшее – 85.

4. В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная – 24 оборота, причём, как обычно, минутная стрелка длиннее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная – 24). Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления итальянских часов, которые встречаются и на обычных часах. Сколько таких положений существует на итальянских часах в течение суток? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах.)

Решение

Пусть некоторое положение стрелки обычных часов до полудня принимают в момент времени t (считая от начала суток; $0 \le t < 12$: мы измеряем время в часах). Так как *часовая* стрелка итальянских часов движется в два раза медленнее часовой стрелки обычных, то она совместится с рассматриваемым положением *часовой* стрелки обычных в момент $2t$. Минутные же стрелки (обычных и итальянских часов) занимают одно и то же положение, если *разница времён* составляет *целое число часов*. Таким образом, условие "совпадения положений" состоит в том, что число $2t - t = t$ – целое. В указанном интервале лежат ровно 12 целых значений – от 0 до 11 (что соответствует моментам 0, 1, ..., 11 часов *ровно* на обычных часах).

Ответ

12 положений.

5. В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найдите длину стороны квадрата и выясните, где расположена точка O - вне или внутри квадрата.

Решение

Пусть K - центр данного квадрата. Точка O равноудалена от вершин B и D. Поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к диагонали BD, т.е. на прямой, содержащей диагональ AC.

Пусть a - сторона данного квадрата. Поскольку $S(ABCD) = a^2 > 225$, то $a > 15$, и $BD = AC = a\sqrt{2} > 15\sqrt{2}$. Поэтому $OC = 5\sqrt{2} < 15\sqrt{2}/2 < CK$.

Пусть точки O и C расположены по одну сторону от прямой BD. Предположим, что точка O лежит вне данного квадрата. Тогда

$$OK = OC + CK > 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2}/2 = 12{,}5\sqrt{2} > 13 = OD,$$

что невозможно, т.к. OK - катет прямоугольного треугольника OKD с гипотенузой $OD = 13$. Следовательно, точка O лежит на отрезке CK.

По теореме Пифагора из треугольника OKD находим:

$$OD^2 = OK^2 + KD^2, \text{ или } 169 = (a\sqrt{2}/2 - 5\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2}/2)^2.$$

Решив это уравнение, получим, что $a = 17$.

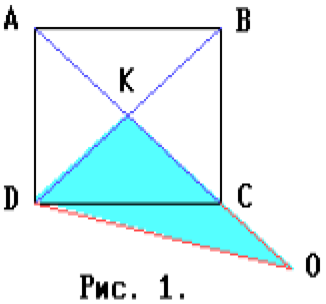


Рис. 1.

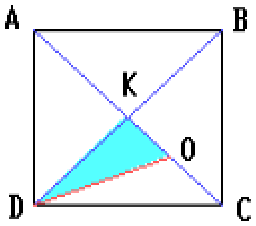


Рис. 2.

Ответ

17; внутри.

6. 10 журналов лежат на журнальном столе, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать пять из них так, что оставшиеся журналы будут покрывать не менее половины площади стола.

Подсказка

Сведите задачу к случаю, когда журналы не перекрываются.

Решение

Занумеруем журналы числами от 1 до 10. От второго журнала отрежем ту часть (если такая есть), которая уже покрывается первым журналом. От третьего журнала отрежем ту часть, которая уже покрывается первым и вторым журналами. Действуем так и дальше, в конце концов от десятого журнала отрежем ту часть, которая уже покрывается всеми журналами с первого по девятый. После описанной процедуры 10 журналов (у некоторых из них, возможно, отрезана какая-то часть, в частности, может быть удален целый журнал) будут покрывать стол в один слой. Следовательно, 5 журналов, наибольших по площади, покрывают не менее половины площади стола. Ясно, что те же самые 5 журналов покрывали не менее половины площади стола и до того, как мы резали журналы. Следовательно, оставшиеся 5 журналов можно убрать со стола так, чтобы условие задачи выполнялось.