РЕГИОНАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР

ШАГ В МАТЕМАТИКУ

1. (1 балл) В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три – на правую, то левая чаша перевесит. Пять слонов встали на левую чашу и четыре – на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

2. (1 балл) Число 1047 при делении на A дает остаток 23, а при делении на $(A+1)$ – остаток 7. Найдите A.

3. (1 балл) На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

4. (1 балл) Если класс из 30 человек рассадить в зале кинотеатра, то в любом случае хотя бы в одном ряду окажется не менее двух одноклассников. Если то же самое проделать с классом из 26 человек, то по крайней мере три ряда окажутся пустыми. Сколько рядов в зале?

5. (2 балла) В магазине было 6 ящиков, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели пять ящиков, причём одна из них взяла по массе яблок в два раза больше, чем другая. Какой ящик остался в магазине? Назовите все возможные случаи.

6. (2 балла) По окружности выписано 10 чисел, сумма которых равна 100. Известно, что сумма каждых трёх чисел, стоящих рядом, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число A, что в любом таком наборе чисел каждое из чисел не превосходит A.

7. (2 балла) На плоскости нарисовали 10 равных отрезков и отметили все их точки пересечения. Оказалось, что каждая точка пересечения делит любой проходящий через неё отрезок в отношении $3:4$. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

8. (2 балла) На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD:DC = 1:2$. Докажите, что у треугольников ADB и CDB есть по равной медиане.

9. (3 балла) Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В клетках квадрата произвольным образом написаны числа 1, 2, 3, ..., 70 по одному и только одному числу в каждой клетке. Доказать, что существуют такие четыре различные клетки с центрами в точках A, B, C, D, что $AB = CD$, $AD = BC$ и сумма чисел, стоящих в клетках с центрами в A и C, равна сумме чисел в клетках с центрами B и D.

10. (3 балла) Внутри квадрата отмечена произвольная точка M. Можно ли этот квадрат разрезать не более чем на три прямоугольника и сложить из них квадрат так, чтобы точка M стала его центром? (Разрезы не должны проходить через точку M.)

Задачи для математического турнира 2026

Устная командная олимпиада

1. В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три – на правую, то левая чаша перевесит. Пять слонов встали на левую чашу и четыре – на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

Решение

Контрпример. Пусть пять слонов весят по 7 т, а ещё пять – по 9 т каждый. Тогда любые четыре слона на левой чаше весов вместе весят не менее чем $4 \cdot 7 = 28$ т, а любые три слона на правой – не более чем $3 \cdot 9 = 27$ т, и левая чаша действительно перевесит.
Но если пять "лёгких" слонов общей массой $5 \cdot 7 = 35$ т встанут на левую чашу весов, а четыре "тяжёлых" слона общей массой $4 \cdot 9 = 36$ т на правую, то перевесит правая чаша.

Ответ

Не обязательно.

2. Число 1047 при делении на A дает остаток 23, а при делении на $(A + 1)$ – остаток 7. Найдите A.

Решение

Так как 1047 даёт остаток 23 при делении на A, то $1047 – 23 = 1024$ делится на A. Аналогично $1047 – 7 = 1040$ делится на $A + 1$. Так как $1024 = 2^{10}$, то $A = 2^n$, где n – натуральное и $n \le 10$. При этом $A > 23$, поэтому $n \ge 5$. Из чисел $2^5 + 1$, $2^6 + 1$, $2^7 + 1$, $2^8 + 1$, $2^9 + 1$, $2^{10} + 1$ только $2^6 + 1 = 65$ является делителем числа 1040. Следовательно, $A = 2^6$.

Ответ

64.

3. На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

Решение

Всего нужно $6 \cdot 5 = 30$ прослушиваний. За один концерт может состояться не более 9 прослушиваний. Значит, концертов не меньше четырёх.

Пример: в концертах выступают музыканты с номерами (4, 5, 6), (2, 3, 6), (1, 3, 5) и (1, 2, 4).

Ответ

За 4 концерта.

4. Если класс из 30 человек рассадить в зале кинотеатра, то в любом случае хотя бы в одном ряду окажется не менее двух одноклассников. Если то же самое проделать с классом из 26 человек, то по крайней мере три ряда окажутся пустыми. Сколько рядов в зале?

Решение

Первое условие означает, что в зале не более 29 рядов. Действительно, если бы количество рядов было не меньше 30, то, очевидно, класс из 30 человек можно было бы рассадить не более чем по одному на каждый ряд.

Второе условие означает, что количество рядов в зале не менее 29. Действительно, если количество рядов не больше 28, то сажая учеников класса из 26 человек по очереди на пустые ряды, получим, что либо в какой-то момент все ряды будут заняты, либо все 26 учеников будут сидеть по одному на 26 рядах, и в этом случае останутся свободными не более двух рядов.

Значит, в кинотеатре 29 рядов. Очевидно, что в этом случае оба условия выполнены.

5. В магазине было 6 ящиков, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели пять ящиков, причём одна из них взяла по массе яблок в два раза больше, чем другая. Какой ящик остался в магазине? Назовите все возможные случаи.

Подсказка

Масса приобретённых яблок делится на 3.

Решение

Масса всех приобретённых яблок в три раза больше чем масса яблок, приобретённых первой фирмой, то есть делится на 3. Общая масса всех ящиков даёт при делении на 3 такой же остаток, как сумма $0 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 = 5$. Следовательно, масса оставшегося ящика даёт при делении на 3 остаток 2. Такой ящик только один.

Ответ

Ящик массы 20 кг.

6. По окружности выписано 10 чисел, сумма которых равна 100. Известно, что сумма каждых трёх чисел, стоящих рядом, не меньше 29.

Укажите такое наименьшее число A, что в любом таком наборе чисел каждое из чисел не превосходит A.

Подсказка

Каждое число из данного набора чисел дополняется до 100 тремя тройками "соседей".

Решение

Пусть X – наибольшее из чисел. Оставшиеся числа разобьём на три тройки "соседей". Сумма чисел в каждой такой тройке не меньше 29, следовательно,

$X \leq 100 - 3\cdot 29 = 13$.

Пример набора с максимальным числом 13: 13, 9, 10, 10, 9, 10, 10, 9, 10, 10.

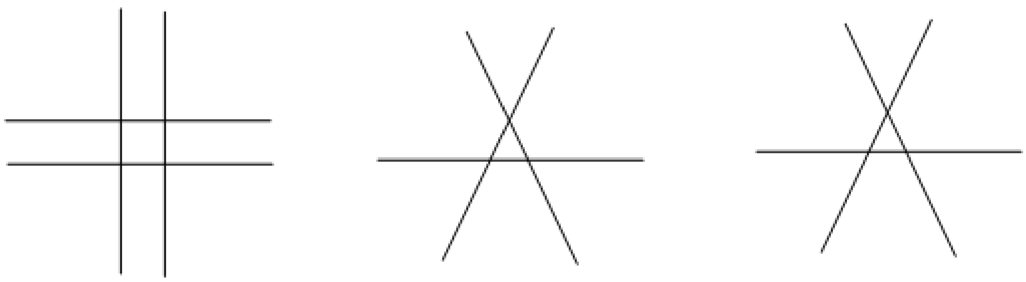
Ответ

А = 13.

7. На плоскости нарисовали 10 равных отрезков и отметили все их точки пересечения. Оказалось, что каждая точка пересечения делит любой проходящий через неё отрезок в отношении $3:4$. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

Решение

На каждом отрезке расположено не более двух точек. С другой стороны, каждая точка пересечения принадлежит не менее чем двум отрезкам. Поэтому точек не более чем $10\cdot2:10=10$. Пример с 10 точками см. на рисунке.



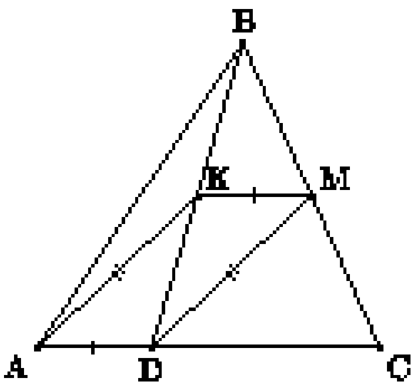
Ответ

10 точек.

8. На стороне АС треугольника АВС взята точка D так, что AD:DC=1:2. Докажите, что у треугольников ADB и CDB есть по равной медиане.

Решение

Пусть K и M – середины BD и BC соответственно (см. рис). Тогда по теореме о средней линии треугольника $KM||DC$ и $KM=\frac{1}{2}DC$, то есть $KM||AD$ и $KM=AD$. Это означает, что $AKMD$ – параллелограмм, а тогда $AK=DM$. Это и есть искомые равные медианы.



9. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В клетках квадрата произвольным образом написаны числа 1, 2, 3, ..., 70 по одному и только одному числу в каждой клетке. Доказать, что существуют такие четыре различные клетки с центрами в точках A, B, C, D, что $AB = CD$, $AD = BC$ и сумма чисел, стоящих в клетках с центрами в A и C, равна сумме чисел в клетках с центрами B и D.

Решение

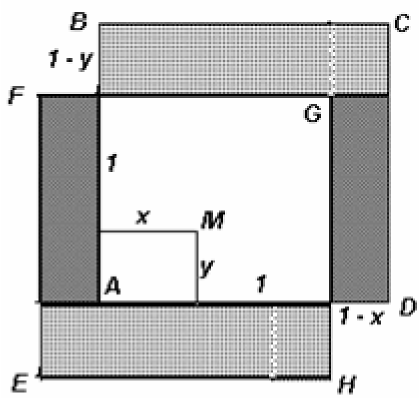
Рассмотрим всевозможные пары клеток, симметричных относительно центра квадрата. Количество таких пар равно $(17^2 - 1) : 2 = 144$. Сумма чисел, написанных в двух клетках, может быть равна 2, 3, ..., 140. Поэтому найдутся две пары клеток, симметричных относительно центра квадрата, с равными суммами написанных чисел. В качестве точек A и C возьмём центры одной пары клеток, а в качестве точек B и D — центры другой пары.

10. Внутри квадрата отмечена произвольная точка M. Можно ли этот квадрат разрезать не более чем на три прямоугольника, и сложить из них квадрат так, чтобы точка M стала его центром? (Разрезы не должны проходить через точку M.)

Решение

Пусть точка M расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что её расстояния до сторон AB и AD равны x и y соответственно. Без ограничения общности можно считать, что сторона квадрата равна 2, а $x, y \le 1$.

Если знаки неравенства строгие, то проведём два разреза параллельно сторонам CD и BC: на расстоянии $1 - x$ от CD и на расстоянии $1 - y$ от BC (см. рис.). Переместив два прямоугольника так, как показано на рисунке, получим квадрат $EFGH$. При этом расстояние от точки M до каждой из его сторон равно 1, то есть M – центр этого квадрата.



Если одно из неравенств оказывается равенством, то достаточно отрезать и переместить один прямоугольник, а если в обоих случаях стоит знак равенства, то M – уже центр квадрата $ABCD$, поэтому разрезать его не потребуется.

Ответ

Можно.