Шифр: В-21

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

по математике

2017/2018

Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ „Сиверская гимназия"

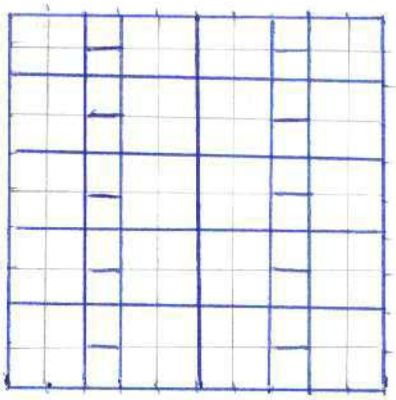
Класс 10

ФИО Чиков Даниил

Анатольевич

1	2	3	4	5	Σ^{+}
7	7	0	X	X	14

№ 10.1



⊞ - 20 штук

□ - 20 штук

№ 10.3

1. $x^5 - y^3 \geq 2x \Rightarrow x^5 \geq 2x \quad (y^3 > 0) \Rightarrow \boxed{x^4 \geq 2}$

2. $x^5 - y^3 \geq 2x$

$y^3 \leq x^5 - 2x$

$\Downarrow$

$\boxed{y^3 \leq x^5}$ $(2x > 0)$

3. Умножим нер. из п. 1 на нер. из п. 2 (Это сделать можно, т.к. в обеих частях неравенств. полож. числа)

$x^4 \cdot x^5 \geq 2 \cdot y^3$

$x^9 \geq 2y^3 \Rightarrow x^3$

№10.2

Решение:

1. Докажем, что победит Вася.
2. Заметим, что после 3-х ходов на доске будет 2 четных и одно нечетное число или 2 нечетных и одно четное. Если эти 3 числа еще не образуют арифметическую прогрессию Васе останется взять либо 2 четных числа (в первом случае) либо 2 нечетных числа (во втором случае), найти их среднее арифметическое и сделать им ход. Тогда сделанный ход с двумя взятыми ранее числами будут образовывать арифметическую прогрессию и Вася победит:

$$x - \frac{x+y}{2} = \frac{x+y}{2} - y \quad (x > y)$$

x и y - выбранные числа

3. Осталось доказать, что Вася может сделать второй ход так, чтобы не проиграть на третьем.
4. Пусть первый ход это x.
   1) Тогда если $x < 1009$, пусть Вася ходит 2017, если x - четное и 2018, если x - нечетное. Предположим, что $a = x$, $a+b$ - наш ход.

в 1 случае:

$x < 1009$

$2017 - x > 1008 \geq 1009$ (цел. ч.)

d - разность ар. пр.

$d > \cancel{1008}\ 1009$

во 2 случае

$x < 1009$

$2018 - x > 1009$

$d > 1009$

Но тогда, если образовалась арифм. прогр.

$a,\ a+d,\ a+2d$

$(a+2d) - a > 2018$, что не может быть, т.к. используемые в игре натуральные числа не превосходят 2018.

Т.е. нельзя сделать так, чтобы ход Пети и наш ход были соседними числами в арифметической прогрессии. Если допустить, что a - ход Пети, а $a+2d$ - наш ход, то $a+d$ не будет целым, т.к. a и $(a+2d)$ разной четности, и Петя также не сможет сделать ход.

2) Если $x = 1009$

Тогда мы делаем ход 2018. ($d = 1009$)

Если предположить, что $a = x = 1009$, $a+2d = 2018$, то $a+d$ - нецелое число, т.к. a и $a+2d$ разной четности.

Если предположить, что $a = x = 1009$, $a+d = 2018$, то $a+2d$ очевидно не входит в заданный диапазон чисел, а $a-d=0$, тоже не входит в заданный диапазон.
Следовательно Вася следующим ходом сможет выиграть.

3) И, наконец: если $x > 1009$,
x - четное, то ходим 1
x - нечетное, то ходим 2.

~~1 сл~~
Предполагаем, что $a = x$, $a-d$ - наш ход

1 случай

$x > 1009$

$x-1 > 1008, \geq 1009$

$d \geq 1009$

Здесь аналогично п. 1)

2 случай

$x > 1009$

$x-2 > 1007 \geq 1008$

$d \geq 1008$

Из этого следует, что $a-(a-2d)$ ~~$(a+2d)-a$~~ ≥ 2016, это возможно, когда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-2d=1 \\ a=2017 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} a-2d=2 \\ a=2018 \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

в (1), т.к. a - нечетное, наш ход будет равен 2 (4)

поэтому такого В-21
не может быть
во (2) a - четное,
поэтому мы бы походили
1.

Если предположить, что $x = a$, наш ход $a - 2d$, то $a - d$ - нецелое, т.к. a и $a - 2d$ разной четности.

5. Следовательно, Вася всегда сможет победить.

Доказано.

№10.3

1) для $x < 1$:

1. $x^5 - y^3 \geq 2x$ ~~$\Rightarrow x^5 \geq 2x \Rightarrow x^4 \geq 2$~~

не выполняется при $x < 1$

$\Rightarrow x^3 - y^3 \geq 2x$ $(x < 1)$ $\Rightarrow x^3 - y^3 \geq 0$ $(2x > 0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$x \geq 0$~~ $x \geq y$

2. $x^5 - y^3 \geq 2x \geq 2y$

$x^3 - y^3 \geq 2y \Rightarrow x^3 \geq 2y$ $(y^3 > 0)$

2) для $x > 1$

1. Пусть $x = a^3$ $y = b^5$, тогда

5

$a^{15} - b^{15} \geq 2a^3$

Нужно д-ть: a

$a^9 \geq 2b^5$

2. $a^{15} - b^{15} \geq 0 \quad (2a^3 > 0)$

$a \geq b$

3. $2a^3 \geq 2b^3$

$a^{15} - b^{15} \geq 2b^3$

$\Rightarrow a^{15} \geq 2b^3$

B-21

6	7	8	9	10	Σ
7	7	2	0.	X	16

№10.6

Решение:

1. Пусть $n = d \cdot m$, где $m \in \mathbb{N}$ (m - частное от деления n на d)

2. Т.к. $0 \le m \le n$:

$$0 \ge -m \ge -n$$

$$n \ge n - m \ge 0,$$

Следовательно среди выписанных дробей есть дробь $\frac{n-m}{n-(n-m)}$

3. Преобразуем её

$$\frac{n-m}{n-(n-m)} = \frac{dm-m}{dm-(dm-m)} = \frac{(d-1)\cancel{m}}{\cancel{m}} = \underline{d-1}$$

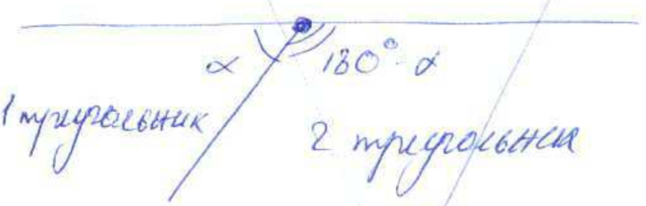
Доказано.

10.7

Решение

1. Докажем, что вершины треугольников не лежат на сторонах четырехугольника (кроме 1 случая)

1) Допустим, что какая-то вершина лежит:



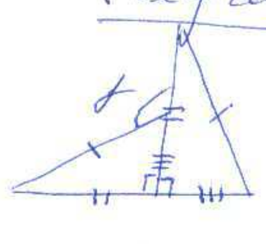
2) Тогда два угла двух треугольников являются смежными (α и $180°-\alpha$)

3) Но т.к. треугольники равные угол $180°-\alpha$ присутствует и в первом треугольнике.

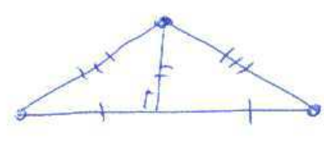
4) Если $\alpha \neq 180°-\alpha$, то сумма углов 1 треугольника $> 180°$ ($\alpha+180°-\alpha+\beta=180°+\beta$) β - третий угол первого треуг.
что не может быть

5) Если $\alpha = 180°-\alpha$, то $\alpha=90°$. Тогда возможны два варианта расположения треугольников

1 случай



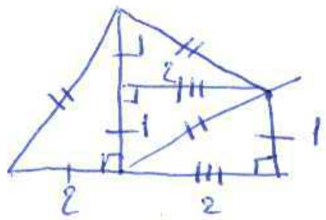
2 случай



№10.7

Решение:

Ответ: Нет



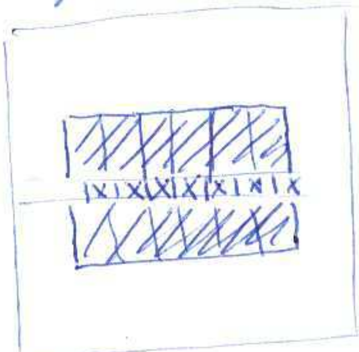
– прямоуг. треугольник, один катет которого в 2 раза больше другого

№10.8 В-21

Решение: 1. Будем стремиться сделать кол-во гепардов на доске максимальным.

2. Заметим, что наименьшее кол-во клеток два гепарда бьют, если они расположены рядом друг с другом (в соседних клетках)

3. Из этого следует, что гепардов следует располагать в одну линию (вертикаль или горизонталь), т.к. в этом случае кол-во свободных клеток будет максимальным.

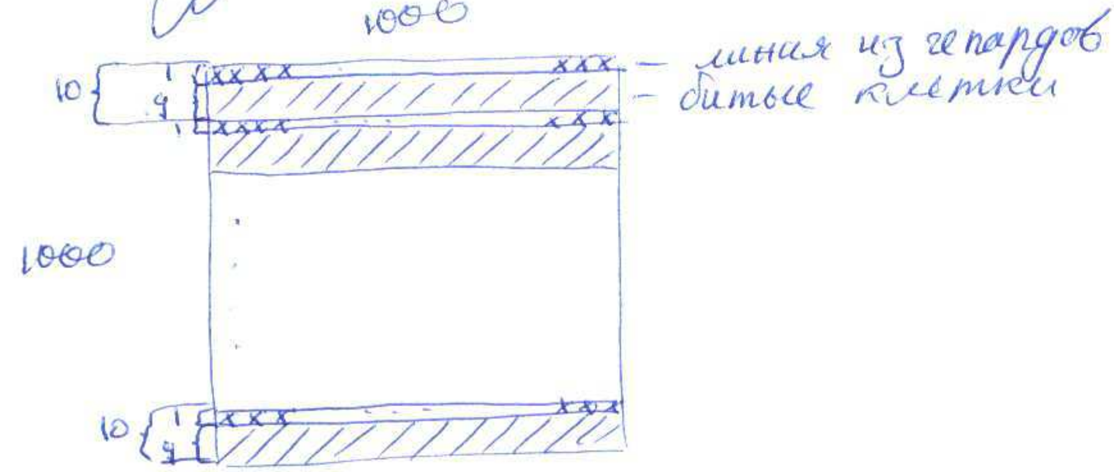


~~4. Не следует~~ располагать на доске одновременно горизонталь и вертикаль гепардов, ~~т.к. кол-во~~

4. Также уменьшить кол-во битых полей можно за счет того, что ~~поз~~ одна или несколько линий гепардов располагается на краях доски.

5. Тогда максимальное кол-во гепардов достигается при

следующей расстановке.



На каждые 10 клеток по вертикали приходится 1 линия гепардов.

Кол-во гепардов: $1000 \cdot \frac{1000}{10} =$

$= 10^5$ гепардов

№ 10.9

Решение:

1. ~~Рассмотрим промежуток~~ Допустим, что не найдется такое число
2. Рассмотрим промежуток чисел от $(10^{2018})!+2$ до $(10^{2018})!+10^{2018}$. Ясно, что в этом промежутке нет простых чисел и все числа в нем $> 10^{2018}$.
3. Тогда, пусть p_k — наибольшее простое число, которое меньше $(10^{2018})!+2$

№10.9 В-21

Решение:

1. Возьмем простое число p_{k+1} такое, что $p_{k+1} > 10^{2018}$ и $p_1 + \ldots + p_k \,\vdots\, 2$

2. Тогда, если предположить, что условие не верно, то $p_1 + \ldots + p_k \,\vdots\, p_{k+1}$ ($p_1 + \ldots + p_k$ не вз-просты с p_{k+1})

3. Аналогично $p_1 + \ldots + p_{k+1} \,\vdots\, p_{k+2}$

4. По постулату Бертрана, между p_{k+1} и $2p_{k+1}$ находится хотя бы одно простое число. Это p_{k+2}

5. Следовательно $p_1 + \ldots + p_{k+2}$ не вз-просто с $2p_{k+1}$, но $p_1 + \ldots + p_{k+1} + p_{k+2} \,\vdots\, p_{k+1}$ ($p_1 + \ldots + p_{k+1} \,\vdots\, p_{k+1}$) $\Rightarrow p_1 + \ldots + p_{k+2} \,\vdots\, 2$, но p_{k+1} и p_{k+2} – нечет. числа, поэтому из п.1 $\underbrace{(p_1 + \ldots + p_k)}_{\vdots 2} + \underbrace{(p_{k+1} + p_{k+2})}_{\vdots 2} \,\vdots\, 2$

Противоречие

5

Доказано.