Шифр: В-6

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2017/2018
Ленинградская область

Район г. Сосновый Бор

Школа МБОУ „СОШ №2"

Класс 10 „А"

ФИО Цедилов Дмитрий Сергеевич

1	2	3	4	5	Σ +
7	7	7	X	0	21

В-6

№10.1

Назовем сторону исходного квадрата a, кол-во квадратиков каждого размера N.

Разобьем какой-нибудь квадрат так, как сказано в условии на квадратики 1×1 и 2×2.

Площадь исходного квадрата a^2, площади квадратиков 1 и 4. Тогда должно выполняться условие:

$a^2 = N\cdot1 + N\cdot4$

$a^2 = 5N \quad (1)$

Это значит, что $a^2 \vdots 5$, следовательно $a \vdots 5$, т.е. стороны исходного квадрата могут быть 5, 10, 15...

Однако, ~~от~~ нечетные стороны не подходят, т.к. в этом случае квадратики 2×2, даже „заполнив" исходный квадрат по максимуму оставят „прослойку", площадь которой равна $a+a-1=2a-1$. ~~Проверим, найдется~~ Для её заполнения понадобится $2a-1$ квадратиков 1×1, т.е $N=2a-1$.

Проверим, удовлетворяет ли это условию (1):

$a^2 = 10a-5$

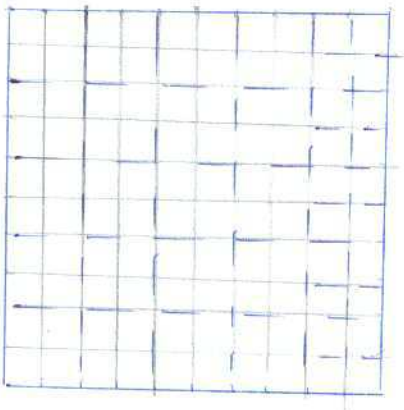
$a^2 - 10a + 5 = 0$

$\frac{D}{4} = 25-5=20$

$a = 5 \pm \sqrt{20}$

Но $a \in N$, значит это невозможно.

Напротив, чётные стороны удовлетворяют условию задачи, например, квадрат 10×10:



$a=10$

$N=20$

№10.2.

Ответ: У Васи.

Д-во:

1. Петя пишет любое нат. число из $[1; 2018]$.
2. а) Если Петя написал число из $[1; 1009]$, то:

– если написанное число чётное, Вася пишет 2017

Таким образом, если обозначить три члена арифм. прогрессии, необходимых для победы, a_1, a_2, a_3 ($a_1<a_2<a_3$), написанное Петей число и 2017 не могут быть a_1 и a_2 (т.к. $a_3=2a_2-a_1$, $a_1<1010$, $a_2=2017$, то $a_3>3024$, что невозможно); не могут быть a_1 и a_3 (т.к. $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$, a_1 – чётное, $a_3=2017$ – нечет., $a_2\notin N$, что невозможно); не могут быть a_2 и a_3 (т.к. $a_1=2a_2-a_3$, $a_2<1009$, $a_3=2017$, $a_1<1$, что невозможно).

– если написанное число нечётное, Вася пишет 2018

Далее рассуждения аналогичные

б) Если Петя написал число из $[1010; 2018]$, то:

– если написанное число чётное, Вася пишет 1.

Далее рассуждения аналогичные ~~в~~ а)

- если написанное число нечетное, Вася пишет 2.

B – 6

Далее рассуждения аналогичные а)

Таким образом, Петя не сможет в свой следующий ход написать число, которое образует с остальными написанными арифм. прогрессию, т.е. не сможет выиграть.

3. Петя пишет любое число из [1; 2018], которое еще не написано.

4. Ко второму ходу Васи будет гарантировано написано либо два четных, либо два нечетных числа (т.к. после первого его хода было написано два числа разной четности).

Вася считает среднее арифм. либо двух четных, либо двух нечетных (смотря какие есть) и пишет получившееся число (такое число еще гарантировано не было написано, т.к. если бы оно было уже написано, то Петя бы уже победил).

Эти 3 числа будут образовывать арифм. прогр., т.к. если $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, то a_1, a_2, a_3 – члены арифм. прогр., т.е. Вася победит.

№ 10.3

$x^5 - y^3 \geq 2x$ Д-ть: $x^3 \geq 2y$

$x > 0, y > 0$

Д-во:

$x^5 - y^3 \geq 2x$

$x^5 \geq 2x + y^3$

Воспользуемся таким неравенством:

Если $a > 0$ и $b > 0$, то

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

В нашем случае $a = 2x$, $b = y^3$

$2x + y^3 \geq 2\sqrt{2xy^3}$.

Но, т.к. $x^5 \geq 2x + y^3$, то

$x^5 \geq 2\sqrt{2xy^3}$

Т.к. $x > 0$ и $y > 0$, т.е. левая и правая части неравенства положительны, то можно возвести в квадрат:

$x^{10} \geq 4 \cdot 2xy^3 \quad | : x > 0$

$x^9 \geq 8y^3$

Т.к. $x > 0$ и $y > 0$, т.е. ~~левая и правая части этого неравенства~~ также положительны

$\sqrt[3]{x^9} \geq \sqrt{8y^3}$

$x^3 \geq 2y$

№ 10.~~4~~5

1) Для удобства „разрежем" ~~этот круг~~ эту окружность так, чтобы число 1 находилось левее разреза, и растянем её в отрезок:

$-a_1-a_2-a_3-\dots-a_n-$ $\qquad a_i$ – число находящееся под номером i.

Причем $a_1 = 1$

2) Можно записать:

$k_1 a_1 = a_2 + a_n$ $\qquad k_i$ – частое от деления суммы на число.

$k_2 a_2 = a_1 + a_3$

$k_i a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$, $i = [2; n-1]$

$a_n = a_1 + a_{n-1}$

Сложим все эти уравнения получим:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Это значит, что сумма $\sum_{i=1}^{n} k_i a_i$ четна.

2) Докажем что $k_{[n]}$ для числа n (а не числа под номером n) равно 1.

Для этого достаточно доказать, что сумма наибольших чисел после n меньше $2n$. Такими числами являются $n-1$ и $n-2$:

$n-1+n-2=2n-3<2n$.

Это значит, что хотя бы одно k_i меньше 2, и хотя бы одно k_i больше 2.

Ответ: 1 (это лишь предположение, но мало ли)

6	7	8	9	10	$\sum$
7	7	2	0	X	~~17~~ 16

B-6

№ 10.6

Все эти дроби имеют вид:

$\frac{a}{n-a}$ (1), где $a \in \mathbb{N}$, $a \in [0; n-1]$.

Если $n \vdots d$, то верно следующее:

$n = kd$, где $k \in \mathbb{N}$ (т.к. $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$) и $k \leq n$

$d = \frac{n}{k}$

$d - 1 = \frac{n-k}{k}$ (2)

Д-м, что найдется такое a, что $\frac{a}{n-a} = \frac{n-k}{k}$ ((1)=(2))

$\frac{a}{n-a} = \frac{n-k}{k} \Big| \cdot k(n-a)$; $k \neq 0$, $a \neq n$

$ak = n^2 - nk - na + ak$

$n^2 = nk + na \,|: n$, $n \neq 0$

$n = k + a$

$a = n - k$

Осталось д-ть, что $(n-k) \in [0; n-1]$

Т.к. $k \leq n$, то

$n - k \geq 0$

Т.к. ~~а~~ $k \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}$), то:

$k \geq 1$

$-k \leq -1$

$n - k \leq n - 1$

Т.е. $\begin{cases} n-k \geq 0 \\ n-k \leq n-1 \end{cases}$

Иными словами $(n-k) \in [0; n-1]$, $(n-k) \in \mathbb{N}$
Итого: дробь равная числу $d-1$ равна $\frac{a}{n-a}$, где $a = n-k$, причем такое a всегда найдется.
где $k = \frac{n}{d}$

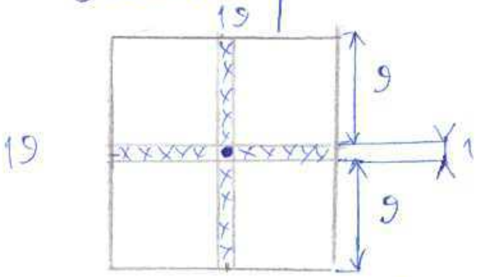
$\blacksquare$

№ 10.8

Поставим первого гепарда в любую клетку. Очевидно, что второго мы можем поставить либо вне квадрата 19×19, центр которого совпадает с I гепардом, либо внутри этого квадрата, но в одном столбце или одной строке с I. Если мы поставим его вне этого квадрата, то мы уменьшим себе площадь, на которую сможем поставить следующих гепардов, сильнее, чем если поставим его внутри этого квадрата, значит выгоднее его именно туда и поставить. Но чем дальше мы поставим II гепарда от I тем меньшая площадь нам останется для последующих, значит нам надо его поставить в соседнюю с I клетку, которая находится в одном столбце или в одной строке с I (разницы между строкой и столбцом нету, т.к мы всегда можем повернуть квадрат 1000×1000).
III гепарда мы можем поставить только в тот столбец/строку, в котором находятся I и II гепарды (иначе хотя бы один из них будет бить III).
Таким образом мы заполним весь столбец/строку гепардами. Чтобы увеличить площадь, подходящую для последующих гепардов, поставим этот столбец/строку на край квадрата 1000×1000.
Очевидно, что всех остальных гепардов надо расставить аналогичным образом (т.е. в столбцы/строки) чтобы их кол-во было максимально, эти

№10.8 (продолжение) В-6

столбцы/строки нужно поставить максимально близко друг к другу.
Рассмотрим квадрат 19×19:



• - гепард
x - клетка, которую гепард не бьет.

Т.е. столбец/строка с гепардами и те столбцы/строки, которые они бьют в одну сторону занимают 10 столбцов/строк.

Значит, нам надо разбить квадрат 1000×1000 на участки по 10 столбцов/строк.

Кол-во таких участков равно:

$\frac{1000}{10}=100$ (шт.)

Т.к. в каждом участке находится по 1000 (длина одного столбца/строки) гепардов, то максимальное кол-во гепардов равно:

$100\cdot 1000=100000=10^5$ (шт.)

Ответ: 10^5 гепардов.

№10.9

Возьмем число $10^{2018}+2$ – оно четное.

Если сумма, о которой говорится в условии нечетна, то ~~$10^{2018}+2$ и сумма заведомо не могут делится друг на друга (~~

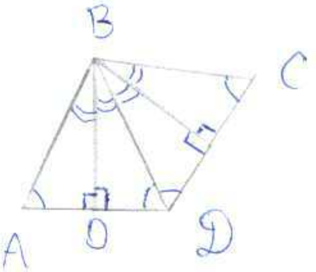
Эта сумма не может делиться на $10^{2018}+2$ (т.к. эти числа разной четности: сумма - нечетная, $10^{2018}+2$ - четное), ~~значит~~ мы нашли такое число. ч.т.д.

~~Если же эта сумма четна, то возьмем число $10^{2018}+3$ - нечетно~~

№ 10.7

Ответ: нет.

Например:



Четырехугольник $ABCD$ составлен из 4 одинаковых прямоугольных треугольников, катеты которых равны по 1 см и 2 см ($\cancel{AB}$ $AO = 1$ см ; $BO = 2$ см).

По Т. Пифагора:

$AB^2 = AO^2 + BO^2$

$AB = \sqrt{5}$ (см)

Если бы $BC \parallel AD$, то $\angle ADB = \angle DBC$ (как накрест леж. при $AD \cap BC$ и сек. BD), но $\angle DBC = \angle ABD$ (по постр.), значит $\angle ADB = \angle ABD$, т.е. $\triangle ABD$ - равноб. и $AB = AD$.

Однако $AB = \sqrt{5}$ см, $AD = 2AO = 2$ см ; $AB \neq AD$ - противоречие

Значит, $BC \nparallel AD$.

Если бы $AB \parallel CD$, то $\angle ABD = \angle BDC$ (как накрест леж.), но $\angle ABD = \angle DBC$ (по постр.), а $\angle BDC = \angle ADB$ (по постр.), т.е. $\angle ADB = \angle DBC$, однако это невозможно (см. выше) - противоречие.

Значит, $AB \nparallel CD$