Шифр: С-21

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
Математика
2017/2018
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОУ „СОШ №2" г. Всеволожска

Класс 11

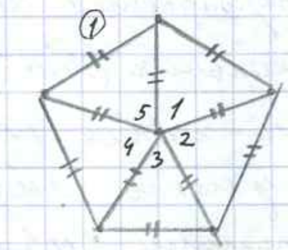
ФИО Ковальчуков Александр Алексеевич

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	5	2	21

№ 11.1.

Допустим, что все 10 отрезков имеют длину 1. Тогда они все равны.

Получается, что пятиугольник составлен из 5 ~~прав~~ равносторонних треугольников (см. картинку)



Известно, что в равностороннем Δ каждый угол равен 60°

~~Тогда ∠1+∠2+∠3+∠4+∠5 = 5·60° = 300°~~

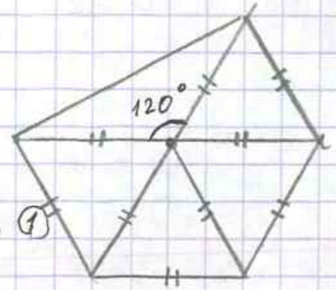
Известно, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360°$

Но если просуммировать углы 1-5 как углы равносторонних треугольников, их сумма будет равна $5 \cdot 60° = 300°$.

Противоречие.

Значит не более 9 отрезков имеют единичную длину.

Покажем, что для 9 отрезков все условия задачи выполнимы.



Пятиугольник выпуклый.

Ответ: 9

№11.2.

Лемма: Имеется перестановка P_n.
Утверждается что при помощи нескольких (возможно 0) последовательных перестановок пар (a_i, a_j) можно получить любую перестановку (Другими словами, меняя местами какие-то 2 элемента можно получить любую перестановку)

Докажем по индукции:

База. $n=1$. Перестановка из 1 элемента существует единственная.

Переход: $n=k$. Пусть для k элементов $\exists\ k!$ перестановок и лемма выполняется.

$n=k+1$. Для каждой P_{k_i}

перестановки допишем в конец a_{k+1} элемент. C-21

$a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}$. k раз применив операцию замены мест для a_{k+1} и элемента стоящего перед ним получим все перестановки:

0) $a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}$

1) $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1} a_{k+1} a_k$

⋮

k) $a_{k+1} a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1} a_k$

Лемма доказана.

Перейдём к задаче:

Выберем 2 любых столбца и переставим в них элементы так, чтобы сначала шли 0, а потом 1.

	i	j
1	0	0
2	0	0
	0	0
	…	…
	0	0
	0	0
	0	0
	0	1
	~~0~~	1
	1	1
	…	…
1000	1	1
1001	1	1

По условию, нулей в каждом столбце больше чем единиц.

Значит в текущей перестановке число строк в пересечении которых стоят только нули больше числа строк в пересечении которых стоят только единицы.

~~Начнём попарно переставлять какие-то элементы в столбце.~~

~~Заметим, что если мы переставляем одинаковые элементы~~

Докажем что разность числа строк с пересечениями в нулях и числа строк с пересечениями в единицах инвариантна.

~~[illegible]~~

Начнём попарно переставлять какие-то элементы в столбце.

1) Если мы переставляем одинаковые элементы, инвариант сохраняется.

2) Если мы переставляем разные элементы, но в другом столбце элементы в этих строках одинаковы, инвариант сохраняется.

3) Если мы переставляем строки вида:

$\boxed{1\,|\,1}$

$\boxed{0\,|\,0}$

После перестановки получим вид

$\boxed{1\,|\,0}$

$\boxed{0\,|\,1}$

число строк, в пересечении которых стоят единицы уменьшилось на 1, но и число строк, в пересечении которых стоит 0 тоже уменьшилось на 1. Разность (инвариант) сохранился.

4) Ситуация обратная третьей.

$\boxed{1\,|\,0}$ $\longrightarrow$ $\boxed{1\,|\,1}$

$\boxed{0\,|\,1}$ $\quad\quad$ $\boxed{0\,|\,0}$

и та, и другая группа увеличиваются на 1, ~~инвар~~ разность сохранилась

В итоге за конечное число попарных перестановок элементов мы можем прийти к исходному порядку элементов в столбцах i и j. (см. лемму). При этом разность строк с 0 и строк 1 не изменилась.
(она положительна)

~~Значит описанное~~

Значит кол-во строк в пересечениях которых со столбцами j и i стоят 0 больше кол-ва строк в пересечении которых стоят 1, ч.т.д.

Обобщая, можно сказать, что указанное свойство верно для любых двух столбцов.

Ответ: да.

№11.4.

Попробуем поприменять описанную операцию:

0) $x_0 = 1-\sqrt{2}$, $y_0 = \sqrt{2}$, $z_0 = 1+\sqrt{2}$

1) $x_1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} - 2 + 2 = 3 - \sqrt{2}$

$y_1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{2} + 1 + 2\sqrt{2} + \cancel{2} = 5$

$z_1 = 2 + \sqrt{2} + 2 + 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 7 + 3\sqrt{2}$.

2) $x_2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 + 15 - 5\sqrt{2} + 25 = 51 - 11\sqrt{2}$

$y_2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 + 21 + 9\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 6 + 49 + 42\sqrt{2} + 18 =$
$= 95 + 38\sqrt{2}$

$z_2 = 25 + 35 + 15\sqrt{2} + 49 + 42\sqrt{2} + 18 = 127 + 57\sqrt{2}$.

3) $x_3 = 51^2 - 2\cdot 51\cdot 11\sqrt{2} + 11^2\cdot 2 + 51\cdot 95 + 38\cdot 51\sqrt{2} -$
$- 11\cdot 95\sqrt{2} - 11\cdot 38\cdot 2 + 95^2 + 2\cdot 95\cdot 38\sqrt{2} + 38^2\cdot 2 =$
$= (51^2 + 11^2\cdot 2 + 51\cdot 95 + 38\cdot 27) + (51\cdot 16 + 95\cdot 65)\sqrt{2}$

$y_3 = 51^2 - 2\cdot 51\cdot 11\sqrt{2} + 11^2\cdot 2 + 51\cdot 127 + 51\cdot 57\sqrt{2} -$
$- 11\cdot 127\sqrt{2} - 11\cdot 57\cdot 2 + 127^2 + 2\cdot 127\cdot 57\sqrt{2} + 57^2\cdot 2 =$
$= a + (51\cdot 35 + 127\cdot 103)\sqrt{2}$, где $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$

$z_3 = (95 + 38\sqrt{2})^2 + (95 + 38\sqrt{2})(127 + 57\sqrt{2}) +$
$+ (57\sqrt{2} + 127)^2 = b + c\sqrt{2}$, где $b, c \in \mathbb{Z}$, $b, c > 0$

Получается, что и x_3 и y_3 и z_3 имеют вид $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{N}$.
Значит при применении к ним описанной операции и приведении подобных слагаемых, слагаемое, содержащее $\sqrt{2}$ будет увеличивать кратность корню из 2. Иными словами, $\forall i: i > 3$ x_i, y_i, z_i будет иметь вид $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{N}$,

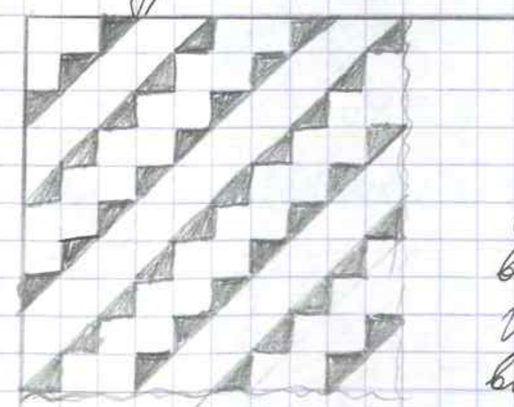
Причём. $x_i > x_{i-1}$ $y_i > y_{i-1}$ $z_i > z_{i-1}$.
Значит $\forall i > 2$ x_i, y_i, z_i - иррациональны.
Кроме того x_0 и x_1 и x_2 иррациональны.
Значит на доске не может появиться трёх рациональных чисел сразу.

Ответ: нет.

№ 11.5.

Ответ: 4000

Пример (показан левый верхний квадрат поля)



Чёрным цветом обозначены треугольники по которым нужно стрелять.

В одной строке их 40, всего строк 100

Итоговое кол-во выстрелов: 4000

~~изначально Σp_i~~ (здесь и в дальнейшем, сумма простых чисел меньших n будет обозначаться Σp_i)

2) Пусть $\Sigma p_i < n$. Тогда $\Sigma p_i \not\vdots\, n$ и $n \not\vdots\, \Sigma p_i$

т.к. n не имеет делителей кроме 1 и самого себя.

Значит $НОД(\Sigma p_i, n) = 1$

3) Пусть теперь $\Sigma p_i > n$, а Σa_i – сумма всех натуральных, меньших n.

Очевидно что $\Sigma p_i < \Sigma a_i$

$$\Sigma a_i = \frac{(1+n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} < n^2$$

$$\Rightarrow \Sigma p_i < n^2 \Rightarrow \Sigma p_i \not\vdots\, n$$

, а n не имеет делителей кроме 1 и самого себя.

Значит $НОД(\Sigma p_i, n) = 1$.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	1	0	15

C-21

№ 11.6.

Известно что $n, d \in N$ и $n \vdots d$

Значит $n = xd$, где $x \in N$

Во всех дробях заменим n на xd.

Получим ряд:

$$\frac{0}{xd}, \frac{1}{xd-1}, \frac{2}{xd-2}, \dots \frac{m}{xd-m}$$

Положим $m = x(d-1)$. Число $\frac{x(d-1)}{xd-x(d-1)}$ точно появится в ряду, т.к.

$$n-1 = xd-1$$
$$xd-1 \geqslant x(d-1)$$
$$-1 \geqslant -x$$
$$1 \leq x$$ – верно, т.к. $x \in N$

$$\frac{x(d-1)}{xd-x(d-1)} = \frac{x(d-1)}{x} = d-1$$, ч.т.д.

№ 11.7.

Известно что $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$

~~Пусть $y=x$.~~

~~Тогда $f(x)+f(x)=2f(x)f(0)$~~

~~$2f(x)=2f(x)f(0)$~~

~~$2f(x)(f(0)-1)=0$~~

~~$f(x)=0 \vee f(0)=1$~~

Пусть $x=y=0$

Тогда $f(0)+f(0)=2f(0)f(0)$

$2f(0)=2(f(0))^2$

$f(0)=(f(0))^2$

$f(0)=a$

$a=a^2 \quad a^2-a=0 \quad a(a-1)=0$

$a=0 \vee a=1$

$f(0)=0 \vee f(0)=1$

Пусть $f(0)=0$ и

$y=x$

$f(x)+f(x)=2f(x)f(0)$

$2f(x)=0$

$f(x)=0$

функция и чётная и нечётная

$y=-x$

$f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$

$f(x)=-f(-x)$

Пусть $f(0)=1$ и $y=-x$

$f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$

$f(x)+f(-x)=2f(x)$

$f(-x)=f(x)$

ф-я чётная

$y=x$

$f(x)+f(x)=2f(x)f(0)$

$2f(x)=2f(x)$ тождество.

Ответ: да, верно.

№ 11.8.

Общеизвестно, что количество простых чисел бесконечно.

Значит мы можем выбрать такое n, что $n>10^{2018}$, $n\in P$ и количество простых чисел меньших n, чётно.

1) Т.к. $n>10^{2018}$, n - нечётно, т.е чётное простое - двойка,

Сумма всех простых до n — чётна, т.к. 2 + чётное количество нечётных чётно.

Значит $n\neq\sum p_i$, т.к. они разной чётности.

№ 11.9 С-21

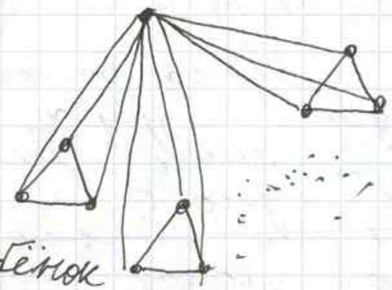
У каждого ребёнка должно быть как минимум 3 друга. Если у него их 2, или меньше, мы удалим одного, и у него останется 1 или меньше. А для попадания в тройку необходимо 2.

Теперь пусть у каждого ребёнка ровно 3 друга. Тогда при удалени одного, оставшиеся должны дружить. Значит все дети разбиваются на четвёрки, которые дружат между собой, но дети из разных четвёрок не дружат. Четвёрок больше одной. Тогда при удалении ребёнка из одной четвёрки другая останется непрочной, и в 4 детей не смогут образовать несколько троек: 3 % 4.

Значит у кого-то из детей более трёх друзей

Утверждается, что такой человек 1, и у него 99 знакомых.

Пример:



99 детей разбиты на тройки. группы и сотый ребёнок дружит со всеми.

Достаточность: Удалим сотого ребёнка. 99 оставшихся детей уже разбиты на тройки. Удалим любого другого. Тогда сотый займёт его место.

Итоговое кол-во пар: $\frac{99 + 99 \cdot 3}{2} = 198.$

Ответ: 198